CONTRIBUTION

À L'ÉTUDE DES

COURBES CONVEXES FERMÉES

ET DE CERTAINES

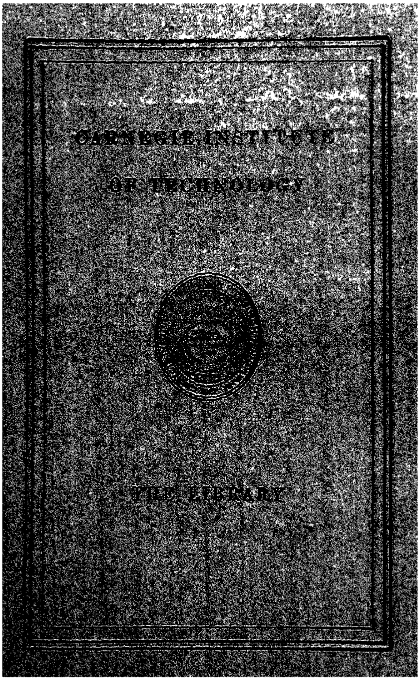
COURBES QUI S'Y RATTACHENT

PAR

CHARLES JORDAN et RAYMOND FIEDLER

DOCTEUR ÈS SCIENCES

DOCTEUR EN PHILOSOPHIE


CARNEGIE INSTITUTE
OF TECHNOLOGY
THE LIBRARY

CONTRIBUTION

A L'ÉTUDE DES

COURBES CONVEXES FERMÉES

ET DE CERTAINES

COURBES QUI S'Y RATTACHENT

PRÉFACE

Au cours d'un travail sur les probabilités géométriques, traitant surtout des problèmes concernant des courbes convexes fermées, nous avons été amenés à considérer une certaine corde de ces courbes que nous avons appelée diamètre de la courbe convexe fermée. A l'aide de cette conception, nous avons obtenu plusieurs résultats que nous jugeons assez intéressants pour les présenter séparément, sous une forme plus générale, dégagée de toute considération de probabilité.

Une note concernant ce travail a été publiée dans les *Comptes-Rendus* du 9 avril 1912.

Budapest, 15 avril 1912.

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DES COURBES CONVEXES FERMÉES ET DE CERTAINES COURBES QUI S'Y RATTACHENT.

La classification des courbes en courbes algébriques et transcendantes, puis la classification des courbes algébriques en courbes rationnelles et irrationnelles, suivant leur ordre, et suivant leur classe, a rendu de grands services à la géométrie ; mais, sous un certain point de vue, ces conceptions étroitement liées à l'emploi des coordonnées cartésiennes, sont quelque peu artificielles, elles conduisent, en effet, à rassembler dans le même groupe des courbes ayant des propriétés géométriques très différentes, et à séparer des courbes géométriquement fort semblables.

La théorie des courbes, à ce point de vue, n'est au fond qu'une représentation géométrique cartésienne très spéciale des fonctions les plus simples.

Les classifications précédentes ne peuvent servir si l'on veut étudier des courbes définies par leurs propriétés purement géométriques, par exemple si l'on veut considérer toutes les courbes convexes fermées, ou toutes les courbes admettant deux et seulement deux tangentes réelles parallèles à une droite donnée quelconque. Pour des études de ce genre on est obligé d'utiliser des disciplines spéciales, différentes dans chaque cas. Le système des coordonnées naturelles, que Cesaro et d'autres ont employé, a rendu de grands services pour l'étude de certaines familles de courbes.

Le système de coordonnées le plus approprié, pour l'étude des courbes convexes fermées et de certaines courbes qui en dérivent est celui des *coordonnées tangentielles polaires* légèrement modifié de la façon suivante. On attribue aux droites considérées comme

les tangentes, normales, etc., un certain sens, c'est-à-dire une direction positive. Nous ne regarderons deux droites comme identiques que si elles ont la même position dans le plan, et que de plus leur sens est le même (on procède d'une manière semblable dans le calcul vectoriel) ; comme nous le verrons plus tard, cette conception rendra les formules plus générales et indépendantes du pôle; cette modification nous oblige à reprendre brièvement les démonstrations concernant le système de coordonnées polaires tangentielles.

1. Choisissons un point comme pôle, et une droite comme axe polaire, une droite quelconque sera définie :

(I) Si l'on donne le coefficient angulaire, c'est-à-dire l'angle α que la direction positive de l'axe fait avec la direction positive de la droite considérée (c'est l'angle dont il faut faire tourner l'axe autour du point d'intersection, en sens inverse des aiguilles d'une montre, pour que les sens positifs des deux droites coïncident ; α variera donc de 0 à 2π ;

(II) Si la distance $|p|$ de la droite au pôle est donnée, le vecteur tangentiel p sera compté positivement si le pôle est à gauche de la droite, négativement dans le cas contraire; p variera donc de $-\infty$ à $+\infty$.

Une équation quelconque $F(p, \alpha) = 0$ représentera, sous certaines conditions, une courbe qui est la courbe enveloppe des droites, dont les coordonnées satisfont à cette équation.

Considérons un ensemble de droites situées dans un plan tel 1° qu'à chaque direction de 0 à 2π corresponde une droite déterminée et une seule ; 2° que le point d'intersection de deux droites voisines faisant un angle $\Delta\alpha$, tende vers un point limite déterminé (le point de contact de la droite), lorsque $\Delta\alpha$ tend vers zéro, ce qui implique la continuité de l'ensemble considéré, c'est-à-dire que la condition $\lim \Delta\alpha = 0$ entraîne la relation $\lim \Delta p = 0$; par contre, le lieu de ces points de contact n'est pas nécessairement une courbe continue.

Nous donnerons à un tel ensemble de droites, le nom de courbes du type H. Ces courbes peuvent être représentées en coordonnées tangentielles polaires par des équations *telles que p soit une fonc-*

tion uniforme [1], *périodique de α de période* 2π ; telles de plus que cette fonction p soit continue et possède une dérivée première par rapport à α, finie et déterminée pour toutes les valeurs de la variable.

On verra au n° **2** que si ces conditions sont satisfaites les points de contact des tangentes sont déterminés et que de plus tous ces points sont situés à distance finie du pôle.

Remarquons que les courbes Π sont des courbes *duales* des courbes fermées sans point multiple, et sans point de rebroussement, admettant une tangente déterminée en chaque point, en effet :

Courbes Π	*Courbes simples fermées, admettant une tangente en chaque point*
A chaque tangente de la courbe on peut faire correspondre d'une manière biunivoque les tangentes d'un cercle.	A chaque point de la courbe on peut faire correspondre d'une manière biunivoque les points d'une circonférence de cercle.
Le point de contact de chaque tangente est déterminé.	La tangente en chaque point est déterminée.
Pas de tangentes multiples, pas de tangentes d'inflexion.	Pas de points multiples, pas de points de rebroussement.

Comme les courbes Π admettent une et une seule tangente dans chaque sens entre o et 2π, elles ne peuvent, par suite, avoir de tangentes d'inflexion, et les seules tangentes doubles possibles sont les tangentes dont le sens diffère de π ; d'après ce qui précède, les tangentes de cette sorte ne seront pas considérées comme identiques, leurs coordonnées sont en effet p, α et $-p$, $\pi+\alpha$. La courbe considérée comme l'ensemble de ces tangentes, sera une courbe continue et fermée, car p est une fonction continue de α, et la droite revient après une rotation de 2π à sa position primitive. En outre, comme p est fini pour toutes les valeurs de α, toutes ces droites seront à distance finie du pôle.

Si la fonction p n'était définie qu'entre o et 2π il faudrait que $p(0)=p(2\pi)$, dans ce cas on étendra la définition de p, sans restreindre la généralité, en posant simplement :

$$p(\alpha+2\pi)=p(\alpha).$$

[1] Ou au moins une fonction telle qu'à chaque valeur de α corresponde une et une seule valeur *réelle* de p.

La plupart des courbes devant être représentées *sous forme paramétrique*, déterminons les conditions pour que la courbe :

$$(1) \qquad p = f(t) \qquad \alpha = \varphi(t),$$

soit une courbe du type Π ; d'après ce qui précède il faut que $f(t)$ et $\varphi(t) - \frac{\pi}{\omega} t$ soient des fonctions uniformes et continues de t, périodiques, de période 2ω, que les dérivées premières de p et de α existent pour toutes les valeurs de t. De plus si t_1 et t_2 sont deux valeurs de t telles que $t_1 \neq t_2 + 2n\omega$, n étant un entier quelconque, il faut encore que l'on ait $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$, ce qui veut dire que α doit être une fonction monotone de t. Si cette condition n'était pas satisfaite, à une valeur de α correspondraient deux valeurs de p, distinctes ou confondues, la courbe ne serait pas une courbe Π.

2. Considérons l'équation tangentielle polaire d'une courbe Π, et déterminons le *point de contact* de la tangente de coordonnées p, α ; ce point sera le point limite des points d'intersection de deux tangentes voisines de coordonnées p, α et $p + \Delta p$, $\alpha + \Delta\alpha$ lorsque les deux tangentes tendent à se confondre.

Abaissons du pôle O des perpendiculaires sur ces deux tangentes, faisant entre elles un angle $\Delta\alpha$, soit M leur point d'intersection, N et N_1 les pieds des deux perpendiculaires, alors on a :

$$NM = p \operatorname{tg} \Delta\alpha + \frac{1}{\sin \Delta\alpha}\left[p + \Delta p - \frac{p}{\cos \Delta\alpha}\right]$$

et si $\Delta\alpha$ tend vers zéro

$$\lim NM = \frac{dp}{d\alpha} = p'$$

on en conclue que, comme dans les courbes Π la dérivée première de p par rapport à α existe pour toutes les valeurs de la variable, les points de contact de toutes les tangentes sont déterminés.

Lorsque $p' = 0$ la normale à la courbe passe par le pôle ; si p' est une fonction continue de α, elle doit s'annuler au moins pour une valeur de α ; il en résulte que par un point quelconque du plan, on peut mener au moins une normale à une courbe Π dont les points de contact forment une courbe continue fermée.

Si $p' > 0$, p augmente avec α, il est alors facile de voir que pour obtenir le point de contact il faut porter la longueur $|p'|$ depuis le pied N de la perpendiculaire, dans le sens positif de la tangente; si $p' < 0$ il faut la porter au sens contraire.

De $p(\alpha) \equiv p(\alpha + 2\pi)$ on conclue que $p'(\alpha) \equiv p'(\alpha + 2\pi)$ et par suite d'après une rotation de 2π de la tangente, le point de contact revient à sa position primitive, néanmoins la courbe considérée comme le lieu de ces points de contact M ne sera pas nécessairement fermée, car nous n'avons rien supposé sur la continuité de p'; par contre si p' est continue pour toutes les valeurs de α, cette courbe sera continue et fermée.

Comme dans le cas des courbes Π, p et p' ont des valeurs finies et déterminées pour toutes les valeurs de α; il en résulte que tous les points de ces courbes sont situés à distance finie du pôle.

Soit une courbe Π donnée par son équation tangentielle polaire en p, α; comme entre ces coordonnées et *les coordonnées cartésiennes* x, y, (l'origine des coordonnées cartésiennes étant au pôle et l'axe des X coïncidant avec l'axe polaire), il y a les relations suivantes :

$$(1) \qquad \begin{cases} x = p \sin \alpha + p' \cos \alpha \\ y = p' \sin \alpha - p \cos \alpha. \end{cases}$$

Le système (1) est la représentation cartésienne de la courbe Π sous forme paramétrique, le paramètre variable étant l'angle α que la tangente fait avec l'axe des X.

En général lorsqu'une courbe est donnée sous une forme paramétrique $x = f(t)$; $y = \varphi(t)$, si le point M correspond à la valeur t_1, le point M_2 à la valeur t_2 du paramètre, $t_1 < t_2$, on définit [1] comme sens positif de la courbe le sens M_1M_2 et comme direction positive de la tangente en M_1 celui qui coïncide avec celle de la courbe; on voit facilement que dans ce cas la direction de la tangente change brusquement de π au points de rebroussement de première espèce. Nous ne pouvons accepter cette manière de voir, car dans nos courbes α varie d'une manière continue, même à travers les points de rebroussement de première espèce.

En un point M_1 l'angle α_1, et en un point voisin M_2 l'angle α_2

---

[1] Voir : SCHEFFERS. — *Theorie der Kurven.* — 1910, p. 23.

définissent la direction positive de la tangente en ces points, soit $\alpha_1 < \alpha_2$, *le sens* M_1M_2 *de la courbe sera alors positif*, s'il coïncide avec celui de la tangente, dans ce cas si α augmente, le point de contact avance dans le sens de la tangente, et la courbe est dans le voisinage de M_1 à gauche de cette tangente. Si par contre le sens M_1M_2 est le sens contraire de celui de la tangente en M_1, nous prendrons ce sens comme *négatif*; dans ce cas si α augmente, le point de contact rétrograde relativement à la tangente et la courbe est dans le voisinage de M_1 à droite de cette tangente.

Pour déterminer le rayon de courbure de la courbe enveloppe en un point, considérons deux tangentes D et D_1, faisant un angle $\Delta\alpha$; soit M leur point d'intersection, N et N_1 les pieds des perpendiculaires abaissées du pôle O sur ces tangentes; soit P et P_1, leurs points de contact; supposons d'abord que dans le voisinage de P et de P_1 la courbe soit située à gauche de la tangente, dans ce cas son rayon de courbure sera :

$$\rho = \lim \left| \frac{\text{arc } PP_1}{\Delta\alpha} \right| = \lim \frac{\text{corde } PP_1}{\Delta\alpha} = \lim \frac{PM + MP_1}{\Delta\alpha}$$

comme :

$$PM + MP_1 = p \operatorname{tg} \Delta\alpha + \Delta p' + MN_1 \frac{(1 - \cos \Delta\alpha)}{\cos \Delta\alpha}$$

il en résulte si $\Delta\alpha$ tend vers zéro :

$$\rho = p + p''.$$

On en conclue que si en un point p'' a une valeur déterminée, le rayon de courbure est déterminé en ce point.

Si dans le voisinage de P la courbe avait été située à droite de la tangente on aurait eu :

$$\lim \left| \frac{PP_1}{\Delta\alpha} \right| = -(p + p'');$$

remarquons que dans ce cas $-(p + p'') > 0$; pour pouvoir exprimer, dans les deux cas, *le rayon de courbure* par la même formule :

$$\rho = p + p''$$

il suffit de compter négativement l'arc PP_1, s'il est situé à droite de la tangente, et positivement s'il est à gauche, conformément à

ce que nous venons de voir ci-dessus. La position du pôle n'a aucune influence sur ces considérations. Par suite si en un point ρ est plus grand que zéro, la courbe tournera sa concavité vers la région gauche de la tangente, et dans le cas contraire vers la région droite.

Si dans le voisinage d'un point ρ est continu et s'il s'annule en ce point, en changeant de signe, la courbe passe d'un côté de la tangente à l'autre, et le point considéré est un point de rebroussement de première espèce. Si ρ s'annule sans changer de signe la courbe reste au même côté de la tangente.

La courbe Π peut être définie de manière que p soit donnée dans un certain intervalle $[\alpha_1, \alpha_2]$ par l'équation suivante :

$$(a) \qquad p = k_1 \sin\alpha + k_2 \cos\alpha$$

où k_1 et k_2 sont des constantes. Dans cet intervalle les points de contact des tangentes sont confondus en un point ; ce point est un point anguleux. De (a) on conclue que $\rho = p + \frac{d^2p}{d\alpha^2} = 0$ dans l'intervalle considéré. Il en résulte que lorsque le rayon de courbure est constamment nul dans un intervalle $[\alpha_1, \alpha_2]$ le point correspondant est un point anguleux dont les tangentes extrêmes font un angle $\alpha_2 - \alpha_1$.

3. On peut définir une *courbe convexe fermée*, de plusieurs manières, en particulier de la façon suivante : On part de la notion d'un ensemble de points à deux dimensions, situés dans un plan, à distance finie d'un point donné. On dit que cet ensemble est convexe, si, en reliant deux points quelconques de l'ensemble par un segment de droite, tous les points du segment appartiennent à l'ensemble. Les points frontières de cet ensemble forment une courbe continue, fermée, *la courbe convexe fermée.*

On démontre qu'un tel ensemble de points possède des points intérieurs, qu'en appelant tangente de l'ensemble une droite passant par au moins un point frontière, sans passer par des points intérieurs : à l'un des côtés de la tangente il n'y a aucun point appartenant à l'ensemble ; qu'à chaque direction α de 0 à 2π on peut faire correspondre une seule tangente et une seule ; qu'en coordonnées tangentielles on peut représenter la courbe frontière

par une équation $p = f(\alpha)$ où p est une fonction uniforme continue de α de période 2π; qu'une demi droite quelconque menée par un point intérieur rencontre la courbe frontière en un et en un seul point, par suite, on peut représenter cette courbe en coordonnées polaires ponctuelles r, φ par une équation $r = f(\varphi)$ où r est une fonction uniforme, continue de φ de période 2π.

Lorsque la courbe convexe fermée est telle, qu'elle ne contient pas de parties droites, alors $\frac{dp}{d\alpha}$ a une valeur déterminée pour toutes les valeurs de α : *la courbe convexe fermée est une courbe du type* Π.

Considérons une courbe convexe fermée telle qu'en chaque point son rayon de courbure ait une valeur déterminée, en outre, si l'on prend un point intérieur comme pôle, on aura pour tous les points de la courbe en coordonnées tangentielles $p \not\geq 0$. Comme p est une fonction continue de α, et $p \not\geq 0$, p doit conserver son signe lorsque α varie de 0 à 2π. La courbe étant toujours du même côté de la tangente, ρ conserve son signe; de plus le pôle et la courbe sont nécessairement du même côté de la tangente, p et ρ ont donc le même signe pour tous les point de la courbe; donc *si la courbe est convexe* on aura pour toutes les valeurs de α, $p\rho \geqq 0$.

On a entre les coordonnées polaires ponctuelles r, φ et les coordonnées tangentielles p, α, rapportées au même pôle et au même axe polaire les relations suivantes :

$$r = \sqrt{p^2 + p'^2} \qquad \varphi = \alpha - \theta \qquad \operatorname{tg} \theta = \frac{r}{r'} = \frac{p}{p'}$$

en posant :

$$r' = \frac{dr}{d\varphi} \quad , \quad p' = \frac{dp}{d\alpha}$$

comme :

$$\alpha = \varphi + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{r}{r'} \qquad \text{ou} \qquad \varphi = \alpha - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{p}{p'}$$

on en déduit que :

$$\frac{d\alpha}{d\varphi} = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2} \qquad \frac{d\varphi}{d\alpha} = \frac{p\rho}{p^2 + p'^2}.$$

Comme dans le cas d'une courbe convexe fermée on a constamment $p\rho \geqq 0$ il en résulte que dans ces courbes α croît d'une manière monotone avec φ ; et que notre condition de convexité est identique avec la condition en coordonnées polaires ponctuelles :

$$r^2 + 2r'^2 - rr'' \geqq 0.$$

On peut montrer inversement qu'*une courbe* Π *qui tourne sa concavité constamment vers le même côté de la tangente est une courbe convexe fermée*, car dans ce cas ρ ne change pas de signe lorsque α varie de 0 à 2π.

Considérons une courbe Π telle que son rayon de courbure existe en chaque point, appellons *longueur algébrique* de cette courbe l'intégrale suivante, qui donne la somme algébrique des éléments d'arc lorsque α varie de 0 à 2π.

$$\mathcal{L}_0 = \int_0^{2\pi} \rho\, d\alpha = \int_0^{2\pi} (p + p'')\, d\alpha = \int_0^{2\pi} p\, d\alpha$$

car :

$$\int_0^{2\pi} p'' d\alpha = p'(2\pi) - p'(0) = 0.$$

Nous verrons plus loin les avantages qu'il y a à introduire cette longueur algébrique (n^{os} **11**, **12**, **16**).

La longueur absolue de la courbe sera donnée par

$$\mathcal{L} = \int_0^{2\pi} |\rho|\, d\alpha$$

on en déduit que la longueur algébrique d'une courbe convexe est égale au signe près à sa longueur absolue.

4. Pour définir l'aire d'une courbe Π, prenons sur elle n points ; joignons les points consécutifs et les sommets de la ligne polygonale fermée obtenue, à un pôle quelconque, l'aire de la courbe sera la limite de la somme des aires des triangles ainsi obtenus, lorsque n augmente indéfiniment de manière que les bases des triangles tendent toutes vers zéro ; comme la hauteur de ces triangles sera à la limite p, l'*aire algébrique* des courbes sera la limite

de $\Sigma p \Delta s$ et si l'on suppose que le rayon de courbure de la courbe existe en chaque point on aura :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} p \rho \, d\alpha \tag{1}$$

ce qui devient dans le cas des courbes convexes ou $\rho \geqq 0$ et par suite $\Delta s > 0$ pour toutes les valeurs de α,

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \int p ds$$

l'intégrale étant prise le long de la courbe convexe fermée. On peut donner une autre forme à la formule (1) en y substituant ρ par sa valeur, on a alors :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (p^2 + pp'') d\alpha$$

et par intégration partielle :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (p^2 - p'^2) d\alpha. \tag{2}$$

L'*aire* de la courbe ainsi définie est *indépendante de la position du pôle*. En effet, prenons le pôle comme origine des coordonnées cartésiennes, l'axe polaire comme axe des X, la perpendiculaire a celui-ci comme axe des Y ; transportons le pôle au point dont les coordonnées cartésiennes sont x_0, y_0, en conservant la direction de l'axe polaire, l'équation tangentielle du nouveau pôle sera

$$p_0 = x_0 \sin \alpha - y_0 \cos \alpha$$

ou p_0 et α sont les coordonnées courantes du pôle ; soit $p = f(\alpha)$ l'équation tangentielle d'une courbe Π relativement au pôle primitif, et $\bar{p} = \bar{f}(\alpha)$ l'équation de la même courbe après le changement de pôle, on a pour une valeur quelconque de α

$$\bar{p} = p - p_0 \qquad \bar{\alpha} = \alpha \tag{3}$$

et comme

$$\int_0^{2\pi} p' \cos \alpha d\alpha = \int_0^{2\pi} p \sin \alpha d\alpha \quad ; \quad \int_0^{2\pi} \sin \alpha \cos \alpha d\alpha = 0$$

$$\int_0^{2\pi} p' \sin \alpha d\alpha = -\int_0^{2\pi} p \cos \alpha d\alpha \quad ; \quad \int_0^{2\pi} (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) d\alpha = 0$$

il résulte de la substitution des valeurs (3) dans la formule (2) que l'aire algébrique de la courbe reste bien indépendante de la position du pôle.

Il est facile de voir que l'aire algébrique *est aussi indépendante de la direction de l'axe polaire;* soit une courbe donnée par son équation tangentielle $p = f(\alpha)$, faisons tourner l'axe polaire dans le sens positif c'est-à-dire en sens inverse de celui des aiguilles d'une montre, d'un angle ε; soient p, α les coordonnées tangentielles d'une droite dans le système primitif, ses coordonnées seront dans le nouveau système $\bar{p} = p$, $\bar{\alpha} = \alpha - \varepsilon$. Comme ε est une constante $p\rho d\alpha$ ne changera pas; de plus p et ρ étant des fonctions périodiques en retranchant ε des limites supérieures et inférieures de l'intégrale étendue à une période entière, la valeur de l'intégrale ne changera pas et l'aire algébrique de la courbe II sera bien indépendante de la direction de l'axe polaire.

Il faut encore conclure des considérations précédentes que les deux courbes $p = f(\alpha)$ et

$$p = k_1 \sin \alpha + k_2 \cos \alpha + f(\alpha + \varepsilon)$$

k_1, k_2 et ε étant des constantes, peuvent être amenés en coïncidence par une translation de l'axe polaire et une rotation autour du pôle.

5. Soit $p = f(\alpha)$ l'équation tangentielle d'une courbe de type II, l'équation du point de contact M d'une tangente de coordonnées p, α sera

$$(1) \qquad p_0 = p \cos(\alpha_0 - \alpha) + p' \sin(\alpha_0 - \alpha)$$

ou p_0, α_0 sont les coordonnées courantes du point de contact.

Prenons le point M comme pôle mobile, et la tangente en ce point comme axe polaire mobile, si p_1 et α_1 sont les coordonnées d'une droite D relatives au système mobile, $\bar{p}$ et $\bar{\alpha}$ les coordonnées relatives au système primitif fixe, on tire de (1)

$$\bar{p} = p_1 + p \cos(\bar{\alpha} - \alpha) + p' \sin(\bar{\alpha} - \alpha)$$
$$\bar{\alpha} = \alpha_1 + \alpha$$

d'ou

$$\bar{p} = p_1 + p \cos \alpha_1 + p' \sin \alpha_1 \tag{2}$$
$$\bar{\alpha} = \alpha_1 + \alpha.$$

si l'on suppose le point M mobile, de manière qu'il décrive la courbe C, les équations (2) représentent sous forme paramétrique, l'équation tangentielle de *la courbe enveloppe de la droite D, donnée dans un système de coordonnées mobiles.*

La longueur algébrique de cette courbe enveloppe, si on la suppose du type II, est d'après le n° **3**

$$\mathfrak{L} = \int_0^{2\pi} \bar{p} d\bar{\alpha} = \int_0^{2\pi} p_1 d\bar{\alpha} + \int_0^{2\pi} (p \cos \alpha_1 + p' \sin \alpha_1)(d\alpha + d\alpha_1)$$

comme

$$\int_0^{2\pi} p' \sin \alpha_1 d\alpha_1 = \int_0^{2\pi} p'' \cos \alpha_1 d\alpha$$

et

$$\int_0^{2\pi} p \cos \alpha_1 d\alpha_1 = -\int_0^{2\pi} p' \sin \alpha_1 d\alpha$$

il en résulte que

$$\mathfrak{L} = \int_0^{2\pi} p_1 d\bar{\alpha} + \int_0^{2\pi} \rho \cos \alpha_1 d\alpha. \tag{3}$$

Soit M_1 le point de la courbe enveloppe situé sur la droite D, et N le pied de la perpendiculaire abaissée de M sur cette droite, N_1 celui de la perpendiculaire abaissée du pôle fixe P sur la même droite on a

$$M_1N = M_1N_1 + N_1N$$

or $M_1N_1 = \dfrac{d\bar{p}}{d\bar{\alpha}} = \bar{p}'$ et N_1N est la distance du pôle fixe à la droite MN ; de (1) on tire la valeur de cette distance en posant

$$\alpha_0 = \bar{\alpha} - \frac{\pi}{2}$$

on a

$$N_1N = p \sin \alpha_1 - p' \cos \alpha_1$$

et enfin on a M_1N en substituant $\bar{p}'$ par sa valeur tirée de (2)

$$(4) \qquad q_1 = M_1N = \rho \sin \alpha_1 \frac{d\alpha}{d\alpha} + \frac{dp_1}{d\alpha}$$

ou ρ est le rayon de courbure de la courbe C au point M.

6. Soit une courbe du type Π donnée en coordonnées tangentielles polaires p et α, *sa podaire relative au pôle* sera le lieu des projections du pôle sur les tangentes, il en résulte que les coordonnées polaires ponctuelles r, φ de la podaire seront

$$(1) \qquad r = p \qquad \varphi = \alpha - \frac{\pi}{2}$$

sa contre podaire relative au pôle sera le lieu des projections du du pôle sur les normales, les coordonnées polaires ponctuelles $\bar{r}$, $\bar{\varphi}$ de cette courbe seront :

$$(2) \qquad \bar{r} = \frac{dp}{d\alpha} = p' \qquad \bar{\varphi} = \alpha.$$

On en conclue que la podaire d'une courbe Π est une courbe continue, mais comme nous n'avons rien supposé sur la continuité de p', sa contre podaire ne sera pas nécessairement une courbe continue.

Etant donnée une courbe en coordonnées polaires ponctuelles r, φ telle que r soit une fonction uniforme et intégrable de φ, lorsque φ varie de 0 à 2π, l'aire de cette courbe sera donnée par l'intégrale

$$(3) \qquad \mathcal{A} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2 d\varphi$$

les courbes d'équation (1) et (2) satisfaisant à la condition précédente, l'aire de la podaire et de la contre podaire sera exprimée par l'intégrale (3).

Il en résulte que l'aire d'une courbe Π donnée par la formule (2) du n° **4** est la différence de l'aire de sa podaire et de celle de sa contre podaire, relatives au même pôle, du reste quelconque.

Dans le cas des courbes convexes fermées, le pôle étant à l'intérieur, cet énoncé devient identique avec le théorème de *Catalan*. (Mém. Sec. Liége, 1886).

7. Déterminons le centre de gravité de courbure d'une courbe Π ; si x, y sont les coordonnées cartésiennes de la courbe, les coordonnées du barycentre de courbure ξ et η sont données par

$$(1) \qquad \xi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x d\alpha \quad ; \quad \eta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} y d\alpha$$

ou $d\alpha$ est l'angle de contingence de la courbe. Substituons x et y par leurs valeurs tirées des équations du n° **2**; l'intégration partielle donne

$$\int_0^{2\pi} p' \cos \alpha d\alpha = \int_0^{2\pi} p \sin \alpha d\alpha$$

$$\int_0^{2\pi} p' \sin \alpha d\alpha = -\int_0^{2\pi} p \cos \alpha d\alpha$$

et les coordonnées du barycentre de courbure sont :

$$(2) \qquad \xi = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} p \sin \alpha d\alpha \quad ; \quad \eta = \frac{-1}{\pi}\int_0^{2\pi} p \cos \alpha d\alpha.$$

Soit une courbe Π donnée en coordonnées ρ, α (voir n° **8**) prenons le point de la courbe correspondant à $\alpha = 0$ comme origine, la tangente en ce point comme axe des X, la normale comme axe des Y, les coordonnées cartésiennes d'un point de la courbe seront (voir (4) du n° **8**)

$$x = \int_0^{\alpha} \rho \cos \alpha d\alpha, \qquad y = \int_0^{\alpha} \rho \sin \alpha d\alpha,$$

substituons ces valeurs dans (1) et simplifions par intégration partielle, les coordonnées du centre de gravité de courbure relatives à ce système deviennent

$$(3) \quad \xi = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \rho\alpha \cos \alpha d\alpha \quad ; \quad \eta = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \rho\alpha \sin \alpha d\alpha.$$

Cette formule permet de déterminer la position du centre, d'une courbe à centre, donnée en coordonnées naturelles ρ, α.

Entre les coordonnées tangentielles pluckeriennes u, v et les coordonnées polaires, on a les relations suivantes :

$$p^2 = \frac{1}{u^2 + v^2} \qquad \operatorname{tg} \alpha = -\frac{u}{v}$$

ou

$$u = \frac{\sin \alpha}{p} \qquad v = -\frac{\cos \alpha}{p}.$$

Il en résulte que si p est un polynôme entier de degré n en $\sin \alpha$ et $\cos \alpha$, la courbe sera une courbe rationnelle et au plus de classe $2n$. Si p est la racine carrée d'un polynôme entier de degré n en $\sin \alpha$ et $\cos \alpha$ il en résulte que la courbe sera algébrique et au plus de classe n.

8. Soit une courbe Π donnée en coordonnées p, α, supposons que p'' est déterminée pour toutes les valeurs de α, dans ce cas, comme nous l'avons vu, le rayon de courbure est déterminé en chaque point et l'on a

$$(1) \qquad \rho = p + p''.$$

Inversement, si l'on donne ρ en fonction de α la courbe sera déterminée, mais non en position ; en effet, résolvons l'équation différentielle (1), on a

$$(2) \quad p = k_1 \cos \alpha + k_2 \sin \alpha + \sin \alpha \int_0^\alpha \rho \cos \alpha \, d\alpha - \cos \alpha \int_0^\alpha \rho \sin \alpha \, d\alpha$$

k_1 et k_2 sont des constantes quelconques.

Si ρ est une fonction intégrable, p existera et sera continue pour toutes les valeurs de la variable ; on démontre l'existence et la continuité de p' en différentiant l'équation (2) ; une seconde différentiation montre que p'' existe également mais n'est pas nécessairement continue.

Nous pouvons donc considérer ρ, α *comme un certain système de coordonnées naturelles*, dans lequel 1° les courbes qui peuvent être amenées à coïncider par translation ont la même équation ; 2° les courbes qu'on peut faire coïncider par une rotation et une translation auront comme équation

$$\rho = f(\alpha) \qquad \text{et} \qquad \rho_1 = f(\alpha + \varepsilon)$$

ε étant une constante quelconque.

Ce système peu utilisé jusqu'ici est souvent plus pratique que celui des coordonnées naturelles usuelles, système dans lequel le rayon de courbure est donné en fonction de la longueur de l'arc.

Déterminons les *conditions* pour qu'*une courbe en coordonnées* ρ, α *soit du type* II. Nous avons vu qu'en coordonnées p, α, il faut qu'on ait pour toutes les valeurs de α, $p(\alpha) \equiv p(\alpha + 2\pi)$; et de plus que p et p' prennent des valeurs finies et déterminées pour toutes les valeurs de α.

Si ρ a une valeur finie et déterminée pour toutes les valeurs de α, p, p', p'' existent pour ces valeurs ; pour que la première condition soit aussi satisfaite, il n'est pas suffisant que l'on ait $\rho(\alpha) \equiv \rho(\alpha + 2\pi)$, en effet, d'après ce qui a été dit au § 2 (2), pour que la courbe soit fermée, *il faut* et *il suffit* que l'on ait pour toutes les valeurs de α :

$$\sin\alpha \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \rho \cos\alpha \, d\alpha - \cos\alpha \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \rho \sin\alpha \, d\alpha = 0$$

ce qui revient à

$$(3) \qquad \int_{0}^{2\pi} \rho \cos\alpha \, d\alpha = 0 \quad \text{et} \quad \int_{0}^{2\pi} \rho \sin\alpha \, d\alpha = 0.$$

Inversement il est facile de voir que pour toutes les courbes fermées ces deux intégrales sont nulles ; en effet, elles représentent la somme algébrique des projections des éléments ds de la courbe, sur l'axe polaire et sur la perpendiculaire à cet axe ; la courbe étant fermée cette somme est nécessairement nulle.

Soit une courbe donnée en coordonnées ρ, α, considérons une seconde courbe telle que ses coordonnées polaires soient

$$\bar{r} = \rho \qquad \bar{\varphi} = \alpha - \frac{\pi}{2} ;$$

cette courbe est la *radiale* de la courbe donnée.

Inversement, soit une courbe donnée en coordonnées polaires ponctuelles r, φ et considérons la courbe suivante :

$$\bar{\rho} = r \qquad \bar{\alpha} = \varphi + \frac{\pi}{2}$$

ou $\bar{\rho}$ et $\bar{\alpha}$ sont le rayon de courbure de la nouvelle courbe, et l'an-

gle de la tangente correspondant à ce rayon. On nomme cette courbe l'*antiradiale* de la courbe primitive.

On peut passer des coordonnées ρ, α aux coordonnées cartésiennes x, $\mathfrak{y}$ à l'aide des relations :

$$
(4) \qquad \begin{cases} x = k_1 + \int_0^\alpha \rho \cos \alpha d\alpha \\ \mathfrak{y} = k_2 + \int_0^\alpha \rho \sin \alpha d\alpha \end{cases}
$$

ou k_1 et k_2 sont des constantes quelconques.

9. Nous allons commencer l'analyse des courbes du type Π à l'aide de ces systèmes de coordonnées. Soit une telle courbe donnée en coordonnées p, α. Posons :

$$
\mathfrak{L}(\alpha) \equiv p(\alpha) + p(\alpha + \pi)
$$

ou $|\mathfrak{L}|$ est la distance des tangentes opposées, c'est-à-dire de direction α et $\alpha + \pi$. On peut introduire cette grandeur $\mathfrak{L}$ dans la formule qui exprime la longueur algébrique de la courbe ; on a, en effet

$$
(1) \qquad \mathfrak{L}_a = \int_0^{2\pi} p d\alpha = \int_0^{\pi} \mathfrak{L} d\alpha.
$$

Nous avons vu que dans le cas particulier où la courbe est une courbe convexe fermée, ρ a toujours le même signe ; par suite la longueur algébrique de la courbe devient égale au signe près à sa longueur absolue, et la formule (1) devient identique à une proposition donnée par Cauchy dans les *Comptes Rendus*, 1841, p. 1060.

Déterminons les *transformations qui transforment une courbe du type* Π *en une autre courbe du même type*. Soit $p = f(\alpha)$ une telle courbe. Pour que le résultat de la transformation

$$
\bar{p} = f_1(\alpha) \qquad \bar{\alpha} = \alpha + f_2(\alpha)
$$

soit une courbe Π, il suffit, d'après le n° **1**, que : (I) f_1 et f_2 soient des fonctions périodiques uniformes et continues de α, de période 2π ; (II) que $\bar{\alpha}$ soit une fonction monotone de α, et de plus

(III) que $\bar{p}$ et $\frac{d\bar{p}}{d\bar{\alpha}}$ soient finies et déterminées pour toutes les valeurs de α; dans ces conditions α sera une fonction uniforme de $\bar{\alpha}$ et par suite $\bar{p}$ également.

10. Comme exemple de ces transformations considérons une *courbe convexe fermée* C; soient r et φ ses coordonnées polaires ponctuelles, le pôle étant à l'intérieur de la courbe. Soit M un de ces points, menons de M une droite D telle que le rayon vecteur fasse avec cette droite un angle ε, différent de zéro, c'est-à-dire telle que si l'on fait tourner le rayon vecteur autour du point M dans le sens positif d'un angle ε, ce dernier coïncide avec la droite D; si ε est une constante différente de $n\pi$ où n est un entier, et si le point M décrit la courbe C la droite D enveloppe une courbe, *la podaire négative oblique* de la courbe C, et l'équation tangentielle polaire de cette podaire sera sous forme paramétrique :

$$\bar{p} = r \sin \varepsilon \qquad \bar{\alpha} = \varphi + \varepsilon = \alpha + \varepsilon - \theta\,;$$

r et $\varepsilon - \theta$ sont bien des fonctions périodiques et $\bar{\alpha}$ est une fonction monotone de α, car d'après le n° **3** on a

$$\frac{d\bar{\alpha}}{d\alpha} = \frac{d\varphi}{d\alpha} = \frac{\rho p}{p^2 + p'^2}$$

comme le pôle est à l'intérieur de la courbe, et comme cette dernière est une courbe convexe fermée, on a $p\rho \geqq 0$ pour toutes les valeurs de α, nous avons vu que par suite on a aussi $\frac{d\varphi}{d\alpha} \geqq 0$, φ est une fonction monotone de α et, par suite, $\bar{p}$ sera une fonction uniforme de $\bar{\alpha}$; de plus $\frac{d\bar{p}}{d\bar{\alpha}} = \frac{dr}{d\varphi} \sin \varepsilon$ existe pour toutes les valeurs de α; la courbe enveloppe des droites D sera donc une courbe du type II.

La longueur algébrique de ces courbes est donnée par

$$\mathfrak{L}_a = \sin \varepsilon \int_0^{2\pi} r d\varphi$$

comme dans ce cas r a le même signe pour toutes les valeurs de φ, cette longueur sera toujours différente de zéro.

On peut montrer que la *podaire négative oblique* d'une courbe convexe fermée, relativement à un point de cette dernière est une courbe du type Π_0.

Soit $p = p(\alpha)$ l'équation tangentielle d'une courbe Π, les tangentes correspondantes aux directions α qui annullent $p(\alpha)$, passent par le pôle ; lorsque la courbe est convexe et le pôle à l'intérieur de la courbe, p étant différent de zéro pour toutes les valeurs de α, aucune des tangentes ne passe par le pôle. La podaire négative oblique d'une courbe convexe relativement à un point intérieur, n'est pas nécessairement une courbe convexe, et l'on a quand même $p \not\simeq 0$, pour toutes les valeurs de α, c'est-à-dire les tangentes à la courbe ne passent pas par le pôle. Considérons le cas général des courbes Π, dont les tangentes ne passent pas par un point O, prenons ce point comme pôle et soit l'équation de la courbe (a) rapportée à ce point $p = p(\alpha)$, on a alors $p > 0$ pour toutes les valeurs de α ; soit ε la valeur minimum de p, alors si l'on prend comme pôle un point quelconque, intérieur au cercle de rayon ε, et de centre O, on aura $p_1 \not\simeq 0$ pour toutes les valeurs de α. Démontrons que l'ensemble $\mathcal{E}$ des points, qui ont cette propriété, est un ensemble convexe. En effet, prenons deux points quelconques O_1 et O_2 appartenant à l'ensemble $\mathcal{E}$, soient les équations de la courbe (a) rapportée à ces points comme pôle $p_1 = p_1(\alpha)$ et $p_2 = p_2(\alpha)$ où l'on a toujours $p_1 > 0$, $p_2 > 0$, il résulte l'équation de la courbe (a), le pôle étant l'un des points quelconques du segment O_1O_2 :

$$p_3 = \lambda p_1 + (1 - \lambda) p_2 \qquad \text{où} \qquad 0 < \lambda < 1 ;$$

des inégalités (b) on conclue que l'on a aussi $p_3 > 0$, par suite, tous les points du segment reliant deux points quelconques de l'ensemble appartiennent à l'ensemble, ce dernier est donc convexe (voir n° **3**).

Dans le cas particulier où $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$, la courbe transformée sera la courbe enveloppe des normales élevées aux rayons vecteurs en leur extrémité M, ce sera la podaire négative de la courbe donnée. Les points de la courbe où la tangente est perpendiculaire au rayon vecteur correspondant sont aussi des points de la podaire négative ; en ces points les tangentes aux deux courbes coïncident.

La podaire négative d'une courbe convexe fermée relative à un point intérieur sera donc toujours une courbe Π.

Comme exemple de ces courbes mentionnons *la courbe de Talbot,* podaire négative de l'ellipse relative à son centre. Donnons nous l'ellipse en coordonnées polaires ponctuelles r, φ sous forme paramétrique :

$$r = \frac{b}{dn\,u} \qquad \varphi = \text{arc sin }(sn\,u) \qquad k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

comme

$$d\varphi = dn\,u\,du \qquad \text{et} \qquad k^2{}_1 = 1 - k^2$$

il en résulte que la longueur algébrique de la courbe de Talbot est :

$$(1) \qquad \mathfrak{L}_a = \int_0^{2\pi} r\,d\varphi = 4b\int_0^{K} du = 4b\,F_1\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$$

ou F_1 est l'intégrale elliptique complète de première espèce de Legendre.

Cette courbe a été rectifiée pour la première fois par Talbot. [Voir Annales de mathématiques pures et appliquées, Nîmes 1823-4 page 380], *la longueur trouvée par lui est égale à la longueur algébrique* que nous venons de calculer, son résultat n'est donc exact que si la podaire négative de l'ellipse est convexe. Pour déterminer les conditions de convexité, cherchons le rayon de courbure de cette courbe ; on a :

$$\rho = r + \frac{d^2 r}{d\varphi^2} = \frac{b}{dn^3 u}\left[2(1 + k^2{}_1)\,dn^2 u - 3k^2{}_1\right]$$

donc ρ sera plus grand, égal, ou plus petit que zéro suivant que l'on a :

$$dn^2 u \gtreqless \frac{3k^2{}_1}{2(1 + k^2{}_1)}$$

par suite si l'on a $2(1 + k^2{}_1) > 3$ la courbe de Talbot est nécessairement convexe, cette condition est identique à la suivante :

$$a^2 \leqq 2b^2.$$

Pour déterminer la longueur absolue de la courbe de Talbot non convexe désignons par u_0 la valeur de u qui annule le rayon de courbure de la courbe, et φ_0 l'angle φ correspondant, on a alors :

$$\mathfrak{L} = 4\int_0^{\varphi_0} \rho d\varphi - \varphi \int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}} \rho d\varphi$$

ou comme :

$$r'(0) = 0 \quad , \quad r'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

$$\mathfrak{L} = 4b(2u_0 - F_1) + 2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)_{u = u_0}.$$

10. A) On sait que la transformation par rayon vecteur réciproque relative au point O, suivie de la transformation podaire inverse relative au même point, est équivalente à la transformation par polaire réciproque, relative au cercle ayant l'unité de longueur comme rayon et comme centre le point O.

Considérons une courbe convexe fermée, et un point O intérieur à cette courbe, la courbe étant donnée en coordonnées polaires ponctuelles r, φ, le pôle étant au point O.

La transformation par rayon vecteur réciproque donne :

$$r_1 = \frac{1}{r} \qquad \varphi_1 = \varphi;$$

la transformation podaire inverse donne la polaire réciproque de la courbe convexe relative au cercle de rayon un, et du centre O. On aura pour cette courbe :

$$\bar{p} = \frac{1}{r} \qquad \bar{\alpha} = \varphi$$

ou en coordonnées naturelles $\bar{\rho}$. $\bar{\alpha}$:

$$(a) \qquad \bar{\rho} = \frac{1}{r^3}\left[r^2 + 2r'^2 - rr''\right] \qquad \bar{\alpha} = \varphi;$$

comme la courbe est convexe, le pôle étant à l'intérieur :

$$r > 0 \quad \text{et} \quad r^2 + 2r'^2 - rr'' \geqq 0$$

pour toutes les valeurs de φ; de plus comme r doit être une fonction uniforme de φ, il en résulte que la courbe (a) sera aussi une

courbe convexe fermée. On voit aisément que les polaires réciproques d'une courbe relative à deux cercles concentriques de rayons a_1 et a_2 sont des figures semblables avec le coefficient de proportionnalité $\frac{a_2^2}{a_1^2}$; il en résulte que *la polaire réciproque d'une courbe convexe fermée* relative à un cercle dont le centre est un point intérieur à la courbe *est une courbe convexe fermée.*

On en déduit que si la courbe $f(x,y) = 0$ est une courbe convexe fermée l'origine étant un point intérieur la courbe $f(u,v) = 0$, sa polaire réciproque relative au cercle $x^2 + y^2 + 1 = 0$ sera aussi convexe.

Remarquons, qu'en désignant par ρ_1 le rayon de courbure de la courbe primitive et posant $\operatorname{tg} \theta = \frac{r}{r'}$ il résulte de (a) la relation connue entre les rayons de courbures d'une courbe et ceux de sa polaire réciproque relative au cercle de rayon un que :

$$\bar{\rho}\rho = \frac{1}{\sin^3 \theta}.$$

11. Comme troisième exemple des transformations des courbes Π, effectuons la suivante :

Soit une courbe Π : $p = f(\alpha)$, menons par un point M de cette courbe, une droite D, faisant un angle ε avec la tangente, c'est-à-dire tel que si l'on fait tourner la tangente autour de M, dans le sens positif d'un angle ε, les directions positives de la tangente et de la droite D coïncident. Si le point M parcourt la courbe et si ε reste constant, la droite considérée euveloppera une courbe, *la développoïde* de la courbe donnée. On a d'après les équations du n° **5**.

$$(1) \qquad \bar{p} = p \cos \varepsilon + p' \sin \varepsilon \qquad \bar{\alpha} = \alpha + \varepsilon.$$

Il est facile de voir que ce système satisfait aux conditions énumérées au n° 9, la courbe sera donc bien une courbe Π, si p'' existe en chaque point.

En désignant par seconde développoïde d'une courbe Π la développoïde de sa développoïde, on conclue que la n-ième développoïde d'une courbe Π, $p = f(\alpha)$ est une courbe Π, si $\frac{d^{n+1}p}{d\alpha^{n+1}}$ existe en chaque point.

L'équation tangentielle de cette dernière sera :

$$p_n = \sum_{i=0}^{i=n} \binom{n}{i} \frac{d^i p}{d\alpha^i} \cos^{n-i} \varepsilon \sin^i \varepsilon \qquad \alpha_n = \alpha + n\varepsilon.$$

Si l'on considère comme direction positive de la normale la direction de la normale vers l'intérieur, pour obtenir l'équation de la courbe enveloppe des normales c'est-à-dire de la développée de la courbe, il suffit de poser dans l'équation de la développoïde $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$; il en résulte que l'équation de la n-ième développée est :

$$p_n = \frac{d^n p}{d\alpha^n} \qquad \alpha_n = \alpha + \frac{n\pi}{2}.$$

Montrons encore une propriété générale des développoïdes : le barycentre de courbure d'une courbe Π et celui de l'une quelconque de ses développoïdes coïncident ; en effet en substituant les valeurs tirées des équations (1) dans les formules (2) du n° **7**, puis en simplifiant par intégration partielle on a les coordonnées $\bar{\xi}$ et $\bar{\eta}$ du barycentre de courbure de la développoïde :

$$\bar{\xi} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} p \sin \alpha d\alpha \qquad \bar{\eta} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} p \cos \alpha d\alpha$$

les coordonnées du barycentre de courbure de la courbe et de sa développoïde sont donc les mêmes.

La longueur algébrique $\bar{\mathfrak{L}}$ de la développoïde est d'après la formule (3) du n° 5, comme $p_1 = 0$ et $\alpha_1 = \varepsilon$:

$$\bar{\mathfrak{L}} = \mathfrak{L}_a \cos \varepsilon$$

$\mathfrak{L}_a$ étant la longueur algébrique de la courbe primitive. On en tire la longueur algébrique de la n-ième développoïde :

$$\bar{\mathfrak{L}}_n = \mathfrak{L}_a \cos^n \varepsilon.$$

Cette formule montre que la longueur algébrique d'une développée d'ordre quelconque d'une courbe Π est nulle.

12. La transformation inverse de la précédente dans le cas où $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$ donne la *développante* de la courbe Π. Supposons que la

courbe soit donnée sous la forme $p = f(\alpha)$, l'équation de sa développante sera :

$$\bar{p} = k + \int_0^\alpha p d\alpha \qquad \bar{\alpha} = \alpha - \frac{\pi}{2}$$

ou k est une constante quelconque ; comme p est continue en chaque point, p est intégrable et par suite $\bar{p}$ existe toujours ; pour que la *courbe soit fermée* il suffit que l'on ait

$$\bar{p}(0) = \bar{p}(2\pi)$$

ou $\int_0^{2\pi} p d\alpha = 0$, c'est-à-dire que la *longueur algébrique de la courbe primitive soit nulle.* De la continuité de p il résulte que la dérivée première de $\bar{p}$ existe et qu'elle est continue pour toutes les valeurs de α. La développante d'une courbe est donc une courbe continue. Nous avons vu que la longueur algébrique des courbes convexes fermées est toujours différente de zéro ; de même celle des podaires négatives obliques des courbes convexes relatives à un point intérieur, et en général celle des courbes Π, dans lesquelles $p \neq 0$ pour toutes les valeurs de α ; il en résulte que les développantes de ces courbes ne peuvent être des courbes fermées.

Donnons quelques exemples simples de courbes Π dont la longueur algébrique est nulle, et dont par suite les développantes sont des courbes fermées :

$$(1) \qquad p = a \sin n\alpha$$

ou a est une constante, et n un nombre entier. Pour $n = 1$ l'équation (1) représente un point ; pour $n = 2$ une astroïde régulière ; $n = 3$ une hypocycloïde à 3 points de rebroussement ; pour $n = 2m$ ou $n = 2m + 1$ des hypocycloïdes à $4m$ ou à $2m + 1$ points de rebroussement.

Remarquons que l'on peut voir immédiatement que les développées de ces courbes sont des courbes semblables à la base, on a en effet

$$\bar{p} = p' = na \cos n\alpha \qquad \bar{\alpha} = \alpha + \frac{\pi}{2}$$

par une rotation de l'axe polaire cette équation sera ramenée à

$$p_1 = na \sin n\alpha.$$

Voici encore un second exemple de ces courbes dont la longueur algébrique est nulle :

$$p = a \sin^{2n+1} \alpha \cos \alpha$$

c'est une courbe à 8 points de rebroussement quelque soit n.

13. Parmi les courbes Π dont la longueur algébrique est nulle il y a un type de courbes remarquables, satisfaisant à la condition suivante, pour toutes les valeurs de α :

$$(1) \qquad \mathfrak{L}(\alpha) \equiv p(\alpha) + p(\alpha + \pi) \equiv 0$$

nous appellerons ces courbes pour abréger, *courbes du type* Π_0.

Une courbe donnée sous la forme paramétrique

$$p = f(t) \qquad \alpha = \varphi(t)$$

est une courbe Π_0 si l'on a pour toutes les valeurs de t

$$p(t) + p(t + \omega) \equiv 0$$

et si $\varphi(t) - \frac{\pi}{\omega} t$ est une fonction périodique de t de période ω ; p et α étant des fonctions uniformes et continues de t ; p et p' ayant des valeurs finies et déterminées pour toutes les valeurs de t ; α étant enfin une fonction monotone de t.

La longueur algébrique des courbes satisfaisant à la condition (1) est d'après le n° **9**, évidemment nulle. Les tangentes dont la direction diffère de π sont confondues leur distance étant nulle ; de même leurs points de contact sont confondus, en effet on a

$$p'(\alpha) + p'(\alpha + \pi) \equiv 0$$

(voir n° **2**).

Si l'angle de la tangente varie de 0 à 2π, le point de contact parcourt deux fois la courbe, on peut donc considérer ces courbes, comme deux courbes confondues ; si pour un instant nous faisons abstraction du sens des tangentes, et si p' est continue, on peut dire que ce sont des courbes fermées qui admettent une et une seule tangente parallèle à une droite donnée quelconque.

La développoïde d'une courbe Π_0, dont le rayon de courbure existe en chaque point *est une courbe* Π_0, en effet supposons que

dans les équations (1) de la développoïde du n° **11**, p satisfait à la condition suivante

$$p(\alpha) + p(\alpha + \pi) \equiv 0\,;$$

on en tire

$$p'(\alpha) + p'(\alpha + \pi) \equiv 0$$

et par suite

$$\bar{p}(\alpha) + \bar{p}(\alpha + \pi) \equiv 0$$

la développoïde est donc bien une courbe Π_0.

Pour qu'une courbe donnée en coordonnées naturelles ρ et α soit une courbe Π_0, il faut que ρ soit une fonction uniforme de α, et que l'on ait identiquement $\rho(\alpha) + \rho(\alpha + \pi) \equiv 0$ de plus que ρ satisfasse aux deux intégrales du n° **8** qui expriment que la courbe est fermée.

Considérons une courbe Π_0 telle que son rayon de courbure ρ soit une fonction continue de α de la relation $\rho(\alpha) \equiv -\rho(\alpha + \pi)$ on en conclue que si α varie de α à $\alpha + \pi$, ρ doit s'annuler un nombre impair de fois en changeant de signe ; par suite ces *courbes* Π_0 *ont un nombre impair de points de rebroussement de première espèce.* Remarquons qu'en outre la courbe Π_0 peut avoir un nombre quelconque des points singuliers pour lesquels son rayon de courbure s'annule sans changer de signe, la courbe restant par suite du même côté de la tangente.

Nous avons déjà rencontré des courbes du type Π_0 en effet l'hypocycloïde à $2n + 1$ points de rebroussement est une telle courbe.

Signalons en outre quelques courbes Π_0 remarquables, soient les courbes d'équations :

$$p = a \sin^{2n+1} \alpha \qquad ; \qquad p = a \sin^{2n} \alpha \cos \alpha$$

ou n est un nombre naturel quelconque. Ces courbes sont toutes des courbes continues, fermées, à *trois points de rebroussement* de première espèce ; ce sont des courbes algébriques dont l'ordre et la classe sont fort différents.

Citons encore des courbes Π_0, transcendentes, continues, fermées,

à trois points de rebroussement, par exemple les courbes ayant pour équation

$$p = a \sin (\sin \alpha) \quad ; \quad p = a \operatorname{Sh} (\sin \alpha).$$

Etant donnée une courbe Π quelconque $p = f(\alpha)$ on en déduit immédiatement une autre du type Π_0, en effet la courbe

$$\bar{p}\,(\alpha) = p(\alpha) - p(\alpha + \pi)$$

satisfait à notre définition des courbes Π_0.

14. Revenons aux courbes Π ; soit une telle courbe donnée en coordonnées polaires tangentielles p, α et en coordonnées polaires ponctuelles r, φ on peut s'assurer facilement que ni la transformation podaire

$$r_1 = p \qquad \varphi_1 = \alpha - \frac{\pi}{2}$$

ni la transformation podaire inverse

$$p_2 = r \qquad \alpha_2 = \varphi + \frac{\pi}{2}$$

ne donnent des courbes Π dans le cas général.

Par contre soit une courbe Π donnée par son équation (1) $\rho = f(\alpha)$ et dans laquelle ρ' existe pour toutes les valeurs de α, sa radiale sera en coordonnées ponctuelles polaires r_1, φ sous forme paramétrique

$$(2) \qquad r_1 = \rho \qquad \varphi_1 = \alpha - \frac{\pi}{2}$$

et la podaire négative de cette radiale sera en coordonnées tangentielles

$$(3) \qquad \bar{p} = \rho = p + p'' \quad , \quad \bar{\alpha} = \alpha$$

ou p se rapporte à la courbe (1) ; la courbe (3) est une courbe Π. En effet elle est fermée, car

$$\bar{p}(\alpha) \equiv \bar{p}(\alpha + 2\pi)$$

et $\bar{p}$ est une fonction uniforme de $\bar{\alpha}$, de plus $\bar{p}'$ existe pour toutes les valeurs de $\bar{\alpha}$. On pourrait appeler cette courbe la *radiale tangentielle* de la courbe primitive.

On peut supposer que cette transformation est effectuée de la manière suivante : les tangentes dont la distance du pôle est p, sont déplacées parallèlement de manière que leur distance au pôle soit $p + p''$ c'est-à-dire de telle manière que le vecteur tangentiel de la courbe transformée soit égal à la somme des vecteurs tangentiels de la courbe primitive, et de sa seconde développée.

Si en chaque point d'une courbe Π, ρ'' existe, l'équation de sa radiale tangentielle sera en coordonnées ρ, α

$$(4) \qquad \bar{\rho} = \rho + \rho'' \qquad \bar{\alpha} = \alpha.$$

Des formules (3) ou (4) on déduit que la longueur algébrique d'une courbe Π est la même que celle de sa radiale tangentielle.

Cette transformation effectuée sur une courbe du type Π_0, telle que p''' existe pour toutes les valeurs de α, conduit à une courbe du même type ; en effet si p satisfait à

$$p(\alpha) + p(\alpha + \pi) \equiv 0 \qquad \text{alors} \qquad \bar{p} = p + p''$$

satisfera aussi à la même condition.

Il faut remarquer que les coodonnées du barycentre de courbure de la courbe transformée sont nulles relativement au pôle, comme on peut le voir par les formules du n° **7** après deux intégrations partielles. Ce centre a été donc amené par cette transformation au pôle.

Comme exemple de cette transformation prenons l'*ellipse* dont l'équation en coordonnées ρ, α est

$$\rho = \frac{a^2 b^2}{(a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha)^{\frac{3}{2}}} \text{ (1)}$$

l'équation de sa radiale tangentielle sera, en coordonnées tangentielles polaires $\bar{p}$, $\bar{\alpha}$

$$\bar{p} = \rho \quad ; \quad \bar{\alpha} = \alpha$$

---

(1) Pour rendre les fonctions p où ρ uniformes dans les cas où elles ont la forme suivante : $[f(\alpha)]^{\frac{1}{n}}$, $f(\alpha)$ étant plus grand que zéro pour toutes les valeurs de α, et n un nombre entier quelconque plus grand que un, alors on attribuera à $[f(\alpha)]^{\frac{1}{n}}$ la valeur de :

$$e^{\frac{1}{n}\log [f(\alpha)]}$$

en prenant toujours la valeur réelle du logarithme.

et d'après les formules du n° **7** en coordonnées tangentielles u, v

$$a^4 b^4 (u^2 + v^2)^4 = (a^2 u^2 + b^2 v^2)^3.$$

Cette courbe est une courbe convexe fermée si $4b^2 \geqq 3a^2$. Sa longueur absolue est alors la même que celle de l'ellipse.

Considérons une courbe Π donnée en coordonnées p, α, telle qu'en chaque point de la courbe, toutes les dérivées de p par rapport à α existent jusqu'à l'ordre $n + 3$, par la transformation précédente on obtient

$$p_1 = p + p'' \qquad \alpha_1 = \alpha$$

et, en répétant la transformation une seconde fois,

$$p_2 = p + 2p'' + p^{(4)} \qquad \alpha_2 = \alpha.$$

Enfin si la transformation est répétée n fois, l'équation de la courbe devient sous forme symbolique

$$p_n = (p + p'')^{(n)} \qquad \alpha_n = \alpha.$$

Toutes ces courbes sont des courbes du type Π et elles ont toutes la même longueur algébrique.

15. Passons à la transformation inverse. Soit une courbe Π donnée en coordonnées p, α, l'*antiradiale de sa podaire relative au pôle*, ou simplement son *antiradiale tangentielle* sera

$$\bar{\rho} = p \qquad \bar{\alpha} = \alpha$$

donc $\bar{\rho}$ est une fonction uniforme et périodique de $\bar{\alpha}$. Pour que la courbe obtenue soit une courbe Π il faut encore que $\bar{\rho}$ satisfasse aux conditions du n° **8** qui expriment que la courbe est fermée; dans le cas considéré ces conditions deviennent :

$$\int_0^{2\pi} p \sin \alpha d\alpha = 0 \qquad \int_0^{2\pi} p \cos \alpha d\alpha = 0$$

d'après le n° **7** ces conditions ne sont satisfaites que si l'équation tangentielle polaire de la courbe primitive a été rapportée à son barycentre de courbure comme pôle.

Etant donnée une courbe Π en coordonnées tangentielles p, α, le pôle étant au barycentre de courbure de la courbe, son anti-

radiale tangentielle sera aussi une courbe Π, et de même longueur algébrique que la courbe donnée.

Supposons que la courbe donnée soit convexe, le pôle étant au barycentre de courbure, donc à l'intérieur de la courbe, comme p sera du même signe pour toutes les valeurs de α, il en résulte que $\bar{\rho}$ ne changera pas de signe lorsqu'α varie de zéro à 2π, par suite, dans ces conditions, l'antiradiale tangentielle sera aussi une courbe convexe fermée et de même longueur absolue que la courbe initiale.

La transformation répétée dans les mêmes conditions donnera aussi des courbes convexes de même longueur.

Comme exemple prenons de nouveau l'ellipse. Son équation tangentielle rapportée à son centre, donc au barycentre de courbure, est

$$p = (a^2 \sin^2\alpha + b^2 \cos^2\alpha)^{\frac{1}{2}}$$

son antiradiale tangentielle relative au pôle aura pour équations :

$$\bar{\rho} = (a^2 \sin^2\alpha + b^3 \cos^2\alpha)^{\frac{1}{2}} \quad ; \quad \bar{\alpha} = \alpha.$$

C'est une courbe transcendente remarquable, en effet, c'est une courbe convexe dont 1° la longueur absolue est la même que celle de l'ellipse ; 2° la longueur d'un arc s'exprime exactement par l'intégrale elliptique de seconde espèce de Legendre.

16. Considérons un cas remarquablement simple de la transformation du n° **9** des courbes Π en courbes Π :

$$(1) \qquad \begin{cases} \bar{p} = p + K \\ \bar{\alpha} = \alpha \end{cases}$$

où K est une constante quelconque.

Comme dans cette transformation on a $\bar{p}' = p'$ il en résulte que les points correspondants des deux courbes, c'est-à-dire les points où les tangentes ont la même direction, sont situés sur une normale commune à ces deux tangentes ; la distance de ces points correspondants est constante et égale à K ; les courbes obtenues sont des *courbes parallèles*. Lie a appelé cette transformation *dilatation*.

Tandis que l'équation cartésienne des courbes parallèles comprend en même temps les deux courbes pour lesquelles la constante est $+ K$ et $- K$, leur équation tangentielle polaire, comme nous l'avons définie, permet de les considérer séparément.

Il résulte des équations (1) que le rayon de courbure de la courbe parallèle est

$$\bar{\rho} = \rho + K$$

donc les centres de courbure des deux courbes aux points correspondants sont confondus et le faisceau des courbes parallèles a la même développée.

La longueur algébrique $\bar{\mathcal{L}}$ des courbes parallèles sera, d'après le n° **3**,

$$\bar{\mathcal{L}} = \mathcal{L} + 2K\pi \tag{2}$$

où $\mathcal{L}$ est la longueur algébrique de la courbe primitive; cette formule a été utilisée pour déterminer la longueur des courbes parallèles extérieures à une courbe convexe fermée; la conception de la longueur algébrique a permis d'étendre également cette formule aux courbes parallèles intérieures.

La formule du n° **4** donne immédiatement l'aire algébrique $\bar{\mathcal{A}}$ des courbes parallèles si l'on connaît l'aire $\mathcal{A}$ et la longueur $\mathcal{L}$ de la courbe primitive

$$\bar{\mathcal{A}} = \mathcal{A} + K\mathcal{L} + K^2\pi. \tag{3}$$

Les considérations du n° **7** montrent que le barycentre de courbure du faisceau des courbes parallèles est le même, et qu'il coïncide avec celui de la courbe primitive.

Remarquons encore que dans le cas des courbes parallèles on a, en se servant des notations du n° **9** :

$$\bar{\mathfrak{L}} = \mathfrak{L} + 2K \qquad \text{et} \qquad \bar{\mathfrak{L}}' = \mathfrak{L}'.$$

Etant donnée une courbe Π telle qu'en chaque point de la courbe son rayon de courbure soit fini et déterminé, on trouve parmi le faisceau des courbes parallèles à cette courbe des courbes convexes; l'équation du faisceau des courbes parallèles étant

$$\bar{p} = p + K \qquad \text{ou} \qquad \bar{\rho} = \rho + K$$

la courbe transformée sera sûrement convexe si l'on a :

$$|K| > |\rho|$$

il en résulte que si l'on donne une courbe Π dont les rayons de courbure sont tous finis, aussi bien les *courbes parallèles intérieures*, si $-K$ est assez grand, que les *courbes parallèles extérieures*, si $+K$ est assez grand, sont des *courbes convexes* ; et inversement toutes les courbes parallèles aux courbes convexes n'ayant pas de parties droites sont des courbes du type Π.

La transformation des courbes Π en leur radiale tangentielle (n° **14**) et la transformation inverse (n° **15**) transforment, comme on peut facilement s'en rendre compte, un faisceau de courbes parallèles en un autre faisceau de courbes parallèles.

Déterminons à l'aide de ces formules l'aire algébrique d'une courbe Π, dont la longueur algébrique est nulle. Considérons une courbe convexe fermée dont l'aire est $\mathcal{A}$ et sa longueur absolue $\mathcal{L}$; la courbe parallèle dont la longueur algébrique est nulle aura comme constante K, d'après (2), $K = -\frac{\mathcal{L}}{2\pi}$; il en résulte que l'aire algébrique $\mathcal{A}_1$ de cette courbe parallèle sera, d'après (3),

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A} - \frac{\mathcal{L}^2}{4\pi}$$

comme on sait que, de toutes les courbes isopérimétriques, c'est le cercle dont l'aire est maximum, et comme la quantité $\mathcal{A}_1$ est zéro pour le cercle, elle sera plus petite que zéro pour toutes les autres courbes ; on en conclue que l'*aire algébrique des courbes dont tous les rayons de courbure sont finis et dont la longueur algébrique est nulle n'est jamais positive.*

17. La condition, pour qu'une courbe du type Π donnée en coordonnées p, α ait un centre est que, par un changement de pôle, on puisse amener son équation à une forme telle que l'on ait :

$$\bar{p}(\alpha) \equiv \bar{p}(\alpha + \pi),$$

dans ces conditions, d'après le n° **4**, l'équation de la courbe doit être de la forme de :

$$p = K_1 \sin\alpha + K_2 \cos\alpha + F_2(\alpha)$$

où K_1 et K_2 sont des constantes, et $F_2(\alpha)$ une fonction périodique de α, de période π (par exemple une fonction paire de $\sin\alpha$). La relation $p = K_1 \sin\alpha + K_2 \cos\alpha$ est alors l'équation tangentielle polaire du centre et $x = K_1$, $y = - K_2$ sont les coordonnées cartésiennes du centre relatives à un système de coordonnées cartésiennes, rectangulaires, l'origine étant au pôle, et l'axe des X coïncidant avec l'axe polaire.

18. Nous avons défini au n° **9**, comme tangentes opposées, deux tangentes d'une courbe Π, dont la direction diffère de π; la distance de ces tangentes est $|\mathfrak{P}|$

$$(1) \qquad \mathfrak{P} = p(\alpha) + p(\alpha + \pi).$$

Nous appellerons points opposés les points de contact des tangentes opposées et *diamètre* le segment de droite obtenu en reliant deux points opposés; soit $|\mathfrak{D}|$ la longueur de ce segment. Par chaque point M de la courbe passe un diamètre. Nous prendrons, comme direction positive de ce diamètre, la direction allant de ce point M vers la région gauche de la tangente en ce point. Appelons τ l'angle dont il faut faire tourner la tangente en M, dans le sens positif, pour la faire coïncider avec la direction positive du diamètre; d'après ce qui précède, τ sera compris entre o et π.

Comme on a

$$\mathfrak{P}'(\alpha) = p'(\alpha) + p'(\alpha + \pi)$$

on conclue facilement de ce qui précède que $\operatorname{tg}\tau = -\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{P}'}$ de plus que $\mathfrak{D} = \frac{\mathfrak{P}}{\sin\tau}$; il en résulte que le signe de $\mathfrak{D}$ est le même que celui de P; des relations précédentes on tire :

$$\mathfrak{D}^2 = \mathfrak{P}^2 + \mathfrak{P}'^2 \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{P}' = - \mathfrak{D} \cos\tau.$$

Nous entendrons toujours par $\mathfrak{P}'$ $\frac{d\mathfrak{P}}{d\alpha}$, de même par $\mathfrak{P}'' = \frac{d^2\mathfrak{P}}{d\alpha^2}$.

On tire $\mathfrak{P}''$ de la formule (1) par deux différentiations :

$$(2) \qquad \mathfrak{P} + \mathfrak{P}'' = \rho(\alpha) + \rho(\alpha + \pi).$$

Si l'on désigne par σ l'angle que la direction positive de l'axe polaire fait avec celle du diamètre, on a $\sigma = \alpha + \tau$.

Les fonctions $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{D}$, τ sont des fonctions périodiques de α dont la période est π.

Soit M_1 et M_2 les points situés aux extrémités d'un diamètre, O_1 et O_2 les centres de courbures correspondants à ces points (*fig.* I) comme d'après le n° **11**, la développée d'une courbe Π est en général une courbe Π, et comme les tangentes en O_1 et O_2 à la développée font entre elles un angle égal à π, il en résulte que le segment de droite $O_1 O_2$ est le *diamètre de la développée* correspondant à la

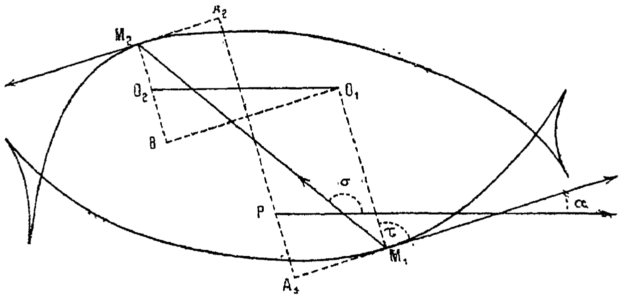


Fig. 1

direction $\alpha + \frac{\pi}{2}$ de sa tangente ; l'angle τ_1 que cette dernière fait avec le diamètre passant par son point de contact est donné par $\operatorname{tg} \tau_1 = -\frac{\mathfrak{P}'}{\mathfrak{P}''}$ et la longueur $|\mathfrak{D}_1|$ de ce diamètre est $\mathfrak{D}_1 = \frac{\mathfrak{P}'}{\sin \tau_1}$. Il en résulte que le signe de $\mathfrak{D}_1$ est le même que celui de $\mathfrak{P}'$; on a aussi :

$$\mathfrak{D}^2{}_1 = \mathfrak{P}'^2 + \mathfrak{P}''^2.$$

Appelons C le point d'intersection des droites M_1M_2 et O_1O_2, comme les triangles M_1CO_1 et M_2CO_2 sont semblables on a :

$$\frac{M_1C}{M_2C} = \frac{O_1C}{O_2C} = \frac{\rho(\alpha)}{\rho(\alpha + \pi)}$$

ce qui détermine le point d'intersection des deux diamètres.

En différentiant $\mathfrak{D}$ par rapport à α on a :

$$\frac{d\mathfrak{D}}{d\alpha} = -(\mathfrak{P} + \mathfrak{P}'') \cos \tau$$

il en résulte que dans le cas d'une courbe Π où ρ existe en chaque point, $\frac{d\mathfrak{D}}{d\alpha}$ existera aussi pour toutes les valeurs de α.

En différentiant $\mathfrak{L} = \mathfrak{D} \sin \tau$ par rapport à α et en substituant $\frac{d\mathfrak{D}}{d\alpha}$ par sa valeur on obtient :

$$\frac{d\tau}{d\alpha} = \frac{\mathfrak{L}(\mathfrak{L} + \mathfrak{L}'')}{\mathfrak{L}^2 + \mathfrak{L}'^2} - 1$$

et encore :

$$\frac{d\sigma}{d\alpha} = \frac{(\mathfrak{L} + \mathfrak{L}'')\mathfrak{L}}{\mathfrak{L}^2 + \mathfrak{L}'^2}.$$

On en conclue que :

$$\frac{d\mathfrak{D}}{d\sigma} = -\mathfrak{D} \cot \tau.$$

Considérons une courbe Π telle qu'en chaque point de la courbe τ soit constant ; on doit alors avoir toujours $\frac{d\tau}{d\alpha} = 0$ c'est-à-dire que $\mathfrak{L}$ doit satisfaire à l'équation différentielle suivante :

$$\mathfrak{L}\mathfrak{L}'' - \mathfrak{L}'^2 = 0$$

comme $\mathfrak{L}$ doit être de plus une fonction périodique de α, la seule solution possible est :

$$\mathfrak{L} = \text{const.}$$

ce qui entraîne :

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{D} = K \qquad \text{et} \qquad \tau = \frac{\pi}{2}.$$

Donc les courbes Π pour lesquelles $\tau = \text{const.}$ sont des *courbes à diamètre constant*, et chaque tangente est perpendiculaire au diamètre passant par son point de contact (voir n° **27**).

Si $\mathfrak{D}$ n'est pas toujours constant, comme :

$$\mathfrak{D}(\sigma) = \mathfrak{D}(\sigma + \pi)$$

il en résulte que $\mathfrak{D}$ doit forcément croître puis décroître par suite $\frac{d\mathfrak{D}}{d\sigma}$ devra changer de signe et à cause de $\cot \tau = -\frac{1}{\mathfrak{D}} \frac{d\mathfrak{D}}{d\sigma}$, τ oscillera autour de $\frac{\pi}{2}$. Il en résulte, qu'étant donnée une courbe Π, τ ne peut être toujours supérieur à $\frac{\pi}{2}$ ou toujours inférieur à cette valeur.

Les extréma de $\mathfrak{L}$ et de $\mathfrak{D}$ ont lieu pour les mêmes valeurs de α,

car la condition $\mathfrak{L}' = 0$ entraîne $\frac{d\mathfrak{D}}{d\alpha} = 0$; pour ces extréma on a donc :

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{D} \qquad \text{et} \qquad \tau = \frac{\pi}{2}.$$

Etant données deux courbes parallèles :

$$p_1 = p \qquad p_2 = p + K$$

considérons les angles τ correspondants à une direction α des tangentes, on a :

$$\operatorname{tg} \tau_1 = -\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{L}'} \qquad \operatorname{tg} \tau_2 = -\frac{\mathfrak{L} + 2K}{\mathfrak{L}'}$$

par suite si $\mathfrak{L}' \neq 0$ τ_1 sera différent de τ_2 et les deux diamètres ne seront pas confondus ; il en résulte que si l'on a pas constamment $\mathfrak{L}' = 0$ les courbes enveloppes des diamètres des deux courbes parallèles seront en général des courbes différentes.

19. Soient p, α les coordonnées de la tangente en un point M d'une courbe Π, prenons ce point comme pôle mobile et la tangente en ce point comme axe mobile, les coordonnées du diamètre passant par M seront dans ce système :

$$p_1 = 0 \qquad \alpha_1 = \tau.$$

D'après le n° 5 *l'équation tangentielle de la courbe enveloppe des diamètres* sera sous forme paramétrique :

$$\text{(1)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \bar{p} &= p \cos \tau + p' \sin \tau \\ \bar{\alpha} &= \sigma = \alpha + \tau \end{aligned} \right.$$

où p, p', τ sont des fonctions uniformes du paramètre α ; en substituant τ par sa valeur tirée de $\operatorname{tg} \tau = -\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{L}'}$, on obtient :

$$\text{(2)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \bar{p} &= \frac{p'\mathfrak{L} - p\mathfrak{L}'}{\sqrt{\mathfrak{L}^2 + \mathfrak{L}'^2}} \\ \operatorname{tg} \bar{\alpha} &= \frac{\mathfrak{L}' \operatorname{tg} \alpha - \mathfrak{L}}{\mathfrak{L}' + \mathfrak{L} \operatorname{tg} \alpha} \end{aligned} \right.$$

il faut remarquer qu'à cause de l'uniformité du système (1) il

faudra prendre dans le système (2) la racine carrée avec le même signe que $\mathfrak{T}$ et $\bar{\alpha}$, telle que l'on ait $\bar{\alpha} - \alpha < \pi$.

Pour déterminer le point de contact de la courbe enveloppe des diamètres faisons dans l'équation (4) du n° **5** $p_1 = 0$ et $\alpha_1 = \tau$, on a alors :

$$(3) \qquad q_1 = \rho \sin \tau \frac{d\alpha}{d\sigma} = \frac{\rho(\alpha)}{\rho(\alpha) + \rho(\alpha + \pi)} \mathfrak{D}$$

et par suite :

$$(4) \qquad \frac{q_1(\alpha)}{q_1(\alpha + \pi)} = \frac{\rho(\alpha)}{\rho(\alpha + \pi)}$$

comme $q_1(\alpha) + q_1(\alpha + \pi) = \mathfrak{D}$, il résulte de la relation (3) du n° **18** que *le point de contact d'un diamètre d'une courbe* Π *est le point d'intersection de ce diamètre avec le diamètre correspondant de la développée* de la courbe Π, ce qui donne une construction simple de ce point.

On peut montrer directement que le point d'intersection de deux diamètres voisins A_1A_2 et B_1B_2 tend vers un point limite lorsque B_1 tend vers A_1, en effet si on appelle S le point d'intersection de ces deux diamètres et $\Delta\sigma$ leur angle, on a :

$$\frac{A_1S}{A_1B_1} = \frac{\sin A_1B_1S}{\sin \Delta\sigma} \quad ; \quad \frac{A_2S}{A_2B_2} = \frac{\sin A_2B_2S}{\sin \Delta\sigma}$$

comme les tangentes à la courbe en A_1 et A_2 sont parallèles, les limites des angles A_1B_1S et A_2B_2S sont égales et :

$$\lim \frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{\rho(\alpha)}{\rho(\alpha + \pi)}$$

il en résulte :

$$\lim \frac{A_1S}{A_2S} = \frac{\rho(\alpha)}{\rho(\alpha + \pi)} = \frac{q_1(\alpha)}{q_1(\alpha + \pi)}.$$

Il résulte de l'équation (3) que pour les valeurs de α telles que $\frac{\rho(\alpha + \pi)}{\rho(\alpha)} \neq -1$ la valeur de q_1 est finie ; pour qu'elle soit aussi déterminée, il faut encore que ce rapport soit infini, ou qu'il ait une valeur déterminée. L'équation $q_1 = 0$ donne les points de la courbe qui sont communs avec la courbe enveloppe de ses diamètres.

Pour que les points de contact des diamètres d'une courbe Π, soient déterminés pour toutes les valeurs α, il faut et il suffit que q_1 et, par suite ρ, ait une valeur déterminée pour chaque valeur de α. Pour que le lieu géométrique de ces points de contact soit continu en un point, il faut qu'en ce point ρ et par suite p'' soient continus. La *courbe enveloppe des diamètres d'une courbe* Π *ne sera donc discontinue qu'aux points où le rayon de courbure* de cette dernière *varie d'une manière discontinue.*

Considérons une courbe Π à centre, transportons le pôle au centre, on aura alors :

$$p(\alpha) \equiv p(\alpha + \pi) = \frac{\mathfrak{L}(\alpha)}{2};$$

il résulte de (2) que tous les diamètres de cette courbe passent par le centre, en effet on a $\bar{p}(\alpha) \equiv 0$, la courbe enveloppe des diamètres se réduit donc à ce point.

Si l'on envisage la formule (2) on voit aisément que la courbe enveloppe des diamètres d'une courbe Π quelconque satisfait à la condition (1) du n° **13**.

$$\bar{p}(\alpha) + \bar{p}(\alpha + \pi) \equiv 0$$

elle satisfait de même à la condition de périodicité :

$$\tau(\alpha) \equiv \tau(\alpha + \pi);$$

$\bar{p}$, $\bar{\alpha}$ sont des fonctions uniformes de α, et outre $\bar{p}$ et $\bar{p}'$ ont des valeurs finies et déterminées si le rapport $\frac{\rho(\alpha + \pi)}{\rho(\alpha)}$ a une valeur déterminée différente de -1.

Pour que la *courbe enveloppe des diamètres* d'une courbe Π ayant en chaque point un rayon de courbure déterminé *soit une courbe* Π_0, il faut que $\bar{\alpha} = \sigma$ soit une fonction monotone de α; comme d'après le n° **18** on a $\frac{d\sigma}{d\alpha} = \frac{\mathfrak{L}(\mathfrak{L} + \mathfrak{L}'')}{\mathfrak{L}^2 + \mathfrak{L}'^2}$ il faut que l'on ait pour toutes les valeurs de la variable a :

$$\mathfrak{L}(\mathfrak{L} + \mathfrak{L}'') \leqq 0 \tag{5}$$

ou encore :

$$\mathfrak{L}[\rho(\alpha) + \rho(\alpha + \pi)] \geqq 0;$$

si l'on considère une courbe convexe fermée, $\mathfrak{L}$, ρ ont le même signe pour toutes les valeurs de α, et la condition (5) se trouve satisfaite (voir aussi le n° **21**).

Les conditions précédentes étant satisfaites *la courbe enveloppe des diamètres d'une courbe convexe fermée est une courbe* Π_0 ; sa longueur algébrique est nulle ainsi que la distance de ses tangentes opposées; les points de contact de ces tangentes sont confondus; ce point parcourt deux fois la courbe lorsque α varie de o à 2π. on peut donc considérer celle-ci comme formée par deux courbes confondues.

20. On pourrait déterminer le rayon de courbure de la courbe enveloppe des diamètres par des différentiations successives en partant des équations (1) du n° **19**, mais on y arrive plus simplement par d'autres considérations.

Soit $\bar{p} = f(\alpha)$ une courbe Π, transformons la, en portant sur chacune de ses tangentes, depuis le point de contact dans le sens positif de longueur T, [T est une fonction donnée de α, telle que $T(\alpha) = T(\alpha + 2\pi)$]; soient M et N deux points voisins de la courbe et M_1, N_1 les points correspondants de la courbe transformée; soit A le point d'intersection des tangentes en M et N, l'angle de M_1N_1 avec la tangente en M étant β_1 on a :

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{(T + \Delta T + NA) \sin \Delta \alpha}{(T + \Delta T + NA) \cos \Delta\alpha - T + AM}$$

et à la limite, si les points M et N viennent se confondre :

$$(\mathrm{r}) \qquad \lim \operatorname{tg} \beta_1 = \operatorname{tg} \beta = \frac{T}{\rho + \dfrac{dT}{d\alpha}}$$

où ρ est le rayon de courbure de la courbe donnée au point M.

Considérons la courbe enveloppe des diamètres comme donnée par son rayon de courbure $\mathfrak{R}$ et par l'angle de sa tangente σ, si nous portons sur chaque tangente une longueur $T = - q_1$ et si nous posons $\beta = \tau$ nous obtenons la courbe primitive; de (r) on tire :

$$\mathfrak{R} = q_1 \cot \tau + \frac{dq_1}{d\sigma}.$$

d'après l'équation (3) du n° **19** on a :

$$\frac{dq_1}{d\sigma} = -q_1 \cot \tau + \mathfrak{D} \frac{d}{d\sigma}\left[\frac{\rho(\alpha)}{\rho(\alpha) + \rho(\alpha + \pi)}\right]$$

il en résulte :

$$(2) \qquad \begin{cases} \mathfrak{R} = \mathfrak{D} \dfrac{d}{d\sigma}\left(\dfrac{\rho}{\mathfrak{L} + \mathfrak{L}''}\right) \\ \sigma = \alpha + \tau. \end{cases}$$

Le système (2) teprésente l'équation naturelle de la courbe enveloppe des diamètres, sous forme paramétrique.

21. Considérons une courbe Π excentrique quelconque, dont l'équation en coordonnées tangentielles polaires p, α, est connue, transformons la courbe de la manière suivante :

$$(1) \qquad \bar{p}(\alpha) = \frac{1}{2}\Big[p(\alpha) + p(\alpha + \pi)\Big] = \frac{\mathfrak{L}}{2}.$$

La courbe Π ainsi obtenue est une courbe à centre (voir n° **17**) nous l'appellerons *la centrique* de la courbe primitive. Elle a des propriétés remarquables, en effet comme la grandeur $\mathfrak{L}$ correspondant à chaque direction α est la même pour la courbe primitive et pour la courbe transformée, il en résulte que :

(I) La longueur algébrique de la centrique est égale à celle de la courbe primitive (voir n° **9**).

(II) Les grandeurs des diamètres correspondants à la même direction α des tangentes, ainsi que les angles adjoints τ, sont les mêmes pour les deux courbes car ces grandeurs sont des fonctions de $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}'$ seules (voir les formules (2) et (3) du n° **18**). Par suite les angles σ que les diamètres correspondants font avec l'axe polaire sont aussi les mêmes et les diamètres correspondants à la même valeur de σ sont parallèles.

(III) Pour les mêmes raisons les diamètres de la développée, et leurs angles adjoints τ_1, restent inaltérés en grandeur et en direction par cette transformation.

(IV) L'équation de la centrique en coordonnées ρ, α est

$$(2) \qquad \bar{\rho} = \frac{1}{2}\Big[\rho(\alpha) + \rho(\alpha + \pi)\Big] = \frac{1}{2}(\mathfrak{L} + \mathfrak{L}'').$$

Nous désignerons dans ce qui suit par R le rayon de courbure de la « centrique » d'une courbe Π.

Les équations de la développée d'un courbe Π donnée en coordonnées ρ et α étant :

$$(3) \qquad \rho_1 = \rho' \qquad \alpha_1 = \frac{\pi}{2} + \alpha$$

la développée de la centrique de cette courbe sera

$$(4) \qquad R' = \frac{1}{2}\left[\rho'(\alpha) + \rho'(\alpha + \pi)\right]$$

mais la courbe (4) est la centrique de la courbe (3) ; il en résulte que *la développée de la centrique* d'une courbe Π, *est la centrique de la développée* de la courbe Π.

La condition pour que la centrique d'une courbe soit une courbe convexe fermée est d'après le n° **3**

$$\mathfrak{L}(\mathfrak{L} + \mathfrak{L}'') \geqq 0$$

c'est justement la condition (5) trouvée au n° **19**, pour que la courbe enveloppe des diamètres d'une courbe Π soit une courbe Π_0 ; il en résulte que *la courbe enveloppe des diamètres d'une courbe* Π *excentrique, dont la centrique est convexe, est une courbe* Π_0. D'après ce que nous avons vu au n° **19** la centrique d'une courbe convexe fermée est une courbe convexe fermée ; cela résulte aussi de la formule (2) du présent numéro.

Etant donnée une courbe Π, si $\mathfrak{P}(\mathfrak{P} + \mathfrak{P}'') \geqq 0$ pour toutes les valeurs de α sa concentrique sera une courbe convexe fermée, et l'on peut considérer cette centrique, comme une courbe donnée en coordonnées ponctuelles polaires $\bar{r}$, $\bar{\varphi}$

$$(5) \qquad \bar{r} = \frac{\mathfrak{D}}{2} \qquad \bar{\varphi} = \sigma$$

ou $\mathfrak{D}$ est une fonction uniforme de σ.

L'aire $\bar{\mathcal{A}}$ de la centrique d'une courbe Π donnée en coordonnées tangentielles polaires p, α est d'après la formule (2) du n° **4**, dans laquelle on fait $p = \frac{\mathfrak{L}}{2}$

$$\bar{\mathcal{A}} = \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} (\mathfrak{L}^2 - \mathfrak{L}'^2)\,d\alpha$$

22. Si une courbe Π quelconque est donnée, sa centrique est déterminée, de même que la courbe enveloppe de ses diamètres ; mais si l'on donne une centrique par l'équation

$$\bar{p} = \frac{\mathfrak{L}}{2} = \frac{1}{2}\left[p(\alpha) + p(\alpha + \pi)\right]$$

on voit qu'il y a une infinité *de courbes* $p = p(\alpha)$ *dont la centrique est la courbe donnée.* Ces courbes forment une famille ayant des propriétés communes remarquables ; elles ont toutes la même longueur algébrique, leurs diamètres correspondants à la même direction des tangentes ont la même longueur, et les angles τ que ces tangentes font avec les diamètres passants par leurs points de contact, sont égaux ; les grandeurs $\mathfrak{L}$ correspondantes à la même direction α des tangentes sont égales ; les diamètres des développées de ces courbes ayant la même direction ont la même longueur.

Considérons une telle famille de courbes Π admettant la courbe C comme centrique, les *développoïdes* de ces courbes forment aussi une famille de courbes admettant comme centrique la développoïde de la courbe C. Un théorème correspondant peut être énoncé pour les radiales tangentielles, pour les antiradiales-tangentielles, pour les courbes parallèles et pour d'autres courbes transformées de la famille de courbes Π admettant la même centrique.

Nous verrons qu'à une centrique convexe correspondent une infinité de courbes convexes ; dans le cas d'une courbe convexe $\mathfrak{L}(\alpha)$ est la distance des tangentes de direction α et $\alpha + \pi$, ou la « largeur » de la courbe dans le sens $\alpha + \frac{\pi}{2}$: les *courbes convexes correspondant à la même centrique ont la même longueur absolue, et elles ont la même largeur dans le même sens.*

A une courbe enveloppe de diamètres correspondent aussi une infinité de courbes Π ; si le rayon de courbure $\mathfrak{R}$ de la courbe enveloppe des diamètres est donné en fonction de l'angle σ de sa tangente correspondante, d'après les équations (2) du n° **20**, le rayon de courbure des courbes Π, dont la courbe enveloppe des diamètres est la courbe donnée, est

$$\rho = (\mathfrak{L} + \mathfrak{L}'')\left\{K + \int_0^\sigma \frac{\mathfrak{R}}{\sqrt{\mathfrak{L}^2 + \mathfrak{L}'^2}}\, d\sigma\right\}$$

où K est une constante, et où $\mathfrak{L}$ est une fonction uniforme quelconque de α telle que l'on ait pour toutes les valeurs de α : $\mathfrak{L}(\alpha) \equiv \mathfrak{L}(\alpha + \pi)$ et $\mathfrak{L}(\mathfrak{L} + \mathfrak{L}'') \geqq 0$ et telle de plus que $\mathfrak{L}'$ ait une valeur finie et déterminée.

D'après le n° **18**, α est une fonction uniforme de σ, par suite on peut regarder $\mathfrak{L}$ comme une fonction uniforme de σ telle que $\mathfrak{L}(\sigma) \equiv \mathfrak{L}(\sigma + \pi)$. On détermine la constante K en remarquant que l'on a $\mathfrak{L} + \mathfrak{L}'' = \rho(\alpha) + \rho(\alpha + \pi)$; on obtient finalement :

$$(1) \qquad \rho = \frac{(\mathfrak{L} + \mathfrak{L}'')}{2} \left\{ 1 - \int_{\sigma}^{\pi+\sigma} \frac{\mathfrak{R}}{\sqrt{\mathfrak{L}^2 + \mathfrak{L}'^2}} d\sigma \right\}$$

la racine carrée devant toujours être prise avec le même signe que $\mathfrak{L}$.

Parmi les courbes représentées par l'équation (1) il y a une infinité de courbes convexes fermées ; en effet, remplaçons dans la fonction $\mathfrak{L}$ par une autre $\varepsilon\mathfrak{L}$, dans laquelle ε est une constante positive, l'équation de la courbe résultante sera

$$\rho = \frac{\mathfrak{L} + \mathfrak{L}''}{2} \left\{ \varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} \int_{\sigma}^{\pi+\sigma} \frac{\mathfrak{R}}{\sqrt{\mathfrak{L}^2 + \mathfrak{L}'^2}} d\sigma \right\}$$

si l'on choisit la fonction $\mathfrak{L}$ telle que l'on ait pour toutes les valeurs de α ou de σ

$$(2) \qquad \mathfrak{L}(\mathfrak{L} + \mathfrak{L}'') \geqq 0 \text{ et } \varepsilon \text{ telle que } \varepsilon^2 > \int_{\sigma}^{\pi+\sigma} \frac{\mathfrak{R}}{\sqrt{\mathfrak{L}^2 + \mathfrak{L}'^2}} d\sigma$$

la courbe sera convexe, car on aura nécessairement $\rho > 0$ (voir aussi le n° **25**).

Soit M un point d'une courbe convexe fermée, la distance de M au point de contact du diamètre passant par ce point est donnée par :

$$q_1 = \frac{\rho(\alpha)}{\rho(\alpha) + \rho(\alpha + \pi)} \mathfrak{D} \qquad \text{(n° 18)}$$

q_1 étant compté dans le sens positif du diamètre, c'est-à-dire vers l'intérieur de la courbe. Si la courbe est convexe on peut considérer, sans restreindre la généralité, $\rho \geqq 0$ et $\mathfrak{D} > 0$ pour toutes les valeurs de α, comme

$$0 \leqq \frac{\rho(\alpha)}{\rho(\alpha) + \rho(\alpha + \pi)} \leqq 1$$

il en résulte qu'aucun *point de la courbe enveloppe des diamètres n'est situé en dehors de la courbe convexe.*

Si l'on donne une courbe Π_0, considérée comme courbe enveloppe des diamètres d'une courbe Π excentrique, et une autre courbe convexe fermée centrique, considérée comme la « centrique » de cette courbe Π, la courbe excentrique Π est complètement déterminée par la formule (1). Elle peut être convexe sous certaines conditions comme nous l'avons vu.

Remarquons l'analogie qui existe d'une part entre la développée et le rayon de courbure de la courbe, d'autre part entre la courbe enveloppe des diamètres et les grandeurs q_1 correspondantes.

23. Prenons un point M de la courbe Π comme pôle mobile, et la tangente en ce point comme axe polaire mobile, soit D une droite dont les coordonnées relatives à ce système mobile sont

$$p_1 = \lambda\mathfrak{L} \qquad \alpha_1 = 0$$

λ étant une constante quelconque; si M décrit la courbe Π, la droite D enveloppe une courbe dont l'équation est d'après le n° **5**

$$(1) \qquad \bar{p} = p + \lambda\mathfrak{L} \qquad \bar{\alpha} = \alpha$$

et le point de contact M_1 de la droite D sera donné par $q_1 = \lambda\mathfrak{L}'$ (voir (4) du n° **5**). Si nous considérons le système de coordonnées cartésiennes rectangulaires, ayant comme origine M et comme axe des ξ l'axe polaire mobile, les coordonnées de M_1 relatives à ce système seront

$$\xi = q_1 = \lambda\mathfrak{L}' \qquad \eta = -\lambda\mathfrak{L}$$

il en résulte, que le coefficient angulaire de la droite MM_1 est égal à $\operatorname{tg} \tau$; donc M_1 est situé sur le prolongement du diamètre passant par M; la distance MM_1 est égale d'après le n° **18** à $\lambda\sqrt{\mathfrak{L}^2 + \mathfrak{L}'^2} = \lambda\mathfrak{D}$; il en résulte que si l'on prolonge chaque diamètre d'une courbe Π, d'une longueur égale à $\lambda\mathfrak{D}$ la droite de longueur $\mathfrak{D}(1 + 2\lambda)$ sera un diamètre de la nouvelle courbe; en effet les tangentes, à la courbe transformée, aux extrémités de cette droite, seront des tangentes opposées. Donc les diamètres de la courbe et de sa transformée sont confondus, et la même courbe enveloppe des diamètres correspond aux deux courbes.

De l'équation tangentielle (1) on tire l'équation de ces courbes transformées en coordonnées naturelles $\bar{\rho}$, $\bar{\alpha}$

$$(2) \qquad \bar{\rho} = \rho + \lambda(\mathfrak{L} + \mathfrak{L}'') \qquad \bar{\alpha} = \alpha$$

cette relation donne en même temps le rayon de courbure de la courbe transformée. Les équations (1) et (2) représentent, si l'on considère λ comme paramètre variable, un faisceau de courbes que nous appellerons, pour abréger, *faisceau de courbes diamétrales.*

Supposons que le diamètre MN d'une courbe donnée C devienne après la transformation M_1N_1 ; soit en O et O_1 les centres de courbure correspondants aux points M et M_1 les coordonnées du point O et O_1 seront, relativement au système précédent :

$$O) \quad \xi = 0, \ \eta = \rho \qquad O_1) \quad \xi = \lambda\mathfrak{L}', \ \eta = \lambda\mathfrak{L}'' + \rho$$

comme le coefficient angulaire de la droite OO_1, rapporté au même système, est le même que celui du diamètre de la développée de C (voir n° **18**), le point O_1 se trouvera situé sur le diamètre de la développée. On en tire une construction géométrique simple des centres de courbure de la courbe diamétrale, correspondant aux centres de courbure de la courbe primitive. La longueur OO_1 est égale à $\lambda\sqrt{\mathfrak{L}'^2 + \mathfrak{L}''^2} = \lambda\mathfrak{D}_1$. On obtient donc la développée de la nouvelle courbe en exécutant la même transformation, avec le même coefficient de proportionnalité λ sur la développée de la courbe primitive.

Désignons par $\mathfrak{L}$ et par $\mathfrak{A}$ la longueur et l'aire algébriques de la courbe primitive et par $\bar{\mathfrak{L}}$ et $\bar{\mathfrak{A}}$ ceux de la courbe transformée, on a alors :

$$(3) \qquad \bar{\mathfrak{L}} = \int_0^{2\pi} \bar{p}\, d\alpha = (1 + 2\lambda)\,\mathfrak{L}.$$

L'aire $\bar{\mathfrak{A}}$ sera calculée à l'aide de la formule (2) du n° **4** en y remplaçant p et p' par leurs valeurs, et en remarquant que

$$\int_0^{2\pi} p'\mathfrak{L}'\, d\alpha = -\int_0^{2\pi} p''\mathfrak{L}\, d\alpha$$

$$(4) \qquad \bar{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A} + \lambda(1 + \lambda)\int_0^{2\pi} \mathfrak{L}\rho\, d\alpha$$

comme $\frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \mathfrak{L}\rho d\alpha$ est l'aire de la centrique, par suite, *la différence des aires algébriques de la courbe transformée et de la courbe primitive est égale à* $4\lambda(1+\lambda)$ *fois l'aire de la centrique.*

Soit ξ, η les coordonnées du barycentre de courbure de la courbe primitive et $\bar{\xi}, \bar{\eta}$ celles du barycentre de la courbe transformée d'après les équations (3) du n° **7**, on trouve comme $\mathfrak{L}(\alpha) \equiv \mathfrak{L}(\alpha+\pi)$ et, par suite,

$$\int_0^{2\pi} \mathfrak{L} \sin\alpha \, d\alpha = \int_0^{\pi} \mathfrak{L}\,[\sin\alpha + \sin(\pi+\alpha)]\, d\alpha = 0$$

que $\bar{\xi} = \xi$, $\bar{\eta} = \eta$. *Les barycentres de courbure d'une courbe* Π *et ceux de ses courbes diamétrales sont confondus.*

Nous avons vu que les angles σ, α, τ ne changent pas cette transformation ; de même qu'à un faisceau diamétral correspond une seule courbe enveloppe des diamètres ; la formule (4) du n° **19** permet de voir directement que les points de contact des diamètres restent invariables dans cette transformation.

Cette transformation constitue un groupe continu de transformation ; en effet, on voit aisément qu'en partant d'une courbe quelconque du faisceau, dont le diamètre a une longueur $(1+2\lambda)\mathfrak{D}$, on peut arriver par la même transformation à une autre courbe quelconque du faisceau, dont le diamètre a une longueur $(1+2\lambda_1)\mathfrak{D}$.

Les coordonnées polaires ponctuelles de la centrique d'une courbe Π étant $\frac{\mathfrak{D}}{2}$ et σ (voir (5) du n° **21**), il en résulte que les centriques de deux courbes diamétrales, dont les diamètres sont $\mathfrak{D}$ et $(1+2\lambda)\mathfrak{D}$, sont des courbes semblables et le coefficient de proportionnalité est $(1+2\lambda)$.

Il est facile de voir qu'un faisceau de courbes diamétrales est transformé par la transformation développoïde du n° **11** en un autre faisceau diamétral, de même coefficient de proportionnalité ; en effet, soient deux courbes diamétrales

$$(a) \qquad p_1 = p \qquad\qquad (b) \qquad p_2 = p + \lambda\mathfrak{L}$$

la transformation développoïde donne

$$(c) \qquad \overline{p}_1 = p \cos \varepsilon + p' \sin \varepsilon$$

$$(d) \qquad \overline{p}_2 = (p + \lambda \mathfrak{L}) \cos \varepsilon + (p' + \lambda \mathfrak{L}') \sin \varepsilon$$

la courbe (d) est bien une courbe diamétrale de la courbe (c), de coefficient de proportionnalité λ.

Inversement étant donnée la courbe (a) et sa développoïde (c), après la transformation diamétrale on obtient les courbes (b) et (d) ; et cette dernière sera la développoïde de la courbe (b).

Des considérations semblables montrent, que si l'on transforme les courbes d'un faisceau diamétral en leur radiale tangentielle, ou en leur antiradiale tangentielle, le pôle étant au centre de gravité de courbure (voir les n^{os} **14** et **15**), les courbes obtenues forment de nouveau un faisceau de courbes diamétrales ayant le même coefficient de proportionnalité. Inversement si l'on donne une courbe et sa radiale tangentielle, la transformation diamétrale donne des courbes, dont l'une sera la radiale tangentielle de l'autre.

Considérons deux courbes parallèles, distantes de k

$$(e) \qquad p_1 = p \qquad\qquad (f) \qquad p_2 = p + k$$

la transformation diamétrale donnera

$$\overline{p}_1 = p + \lambda \mathfrak{L}$$
$$\overline{p}_2 = p + k + \lambda (\mathfrak{L} + 2k).$$

Ces courbes seront aussi des courbes parallèles, mais leur distance sera

$$(1 + 2\lambda) k.$$

Par contre, les courbes parallèles (g) et (h) des courbes diamétrales (a) et (b)

$$(g) \qquad \overline{p}_1 = p + k \qquad\qquad (h) \qquad \overline{p}_2 = p + \lambda \mathfrak{L} + k$$

n'appartiennent plus à un même faisceau diamétral ; il en résulte que les courbes parallèles aux courbes d'un faisceau diamétral ne forment plus un faisceau diamétral.

24. Considérons une courbe remarquable du faisceau diamétral, correspondant à une courbe Π donnée $p = f(\alpha)$, celle qui corres-

pond à $\lambda = -\frac{1}{2}$; l'équation tangentielle de cette courbe est la suivante :

$$(1) \qquad \bar{p} = p - \frac{\mathfrak{L}}{2} = \frac{1}{2}\left[p(\alpha) - p(\alpha + \pi)\right],$$

d'après le n° **13** c'est une courbe du type Π_0.

Au point de vue géométrique on peut supposer que cette courbe est engendrée de la manière suivante : on considère deux tangentes opposées de direction α et $\alpha + \pi$, puis une droite D passant entre elles à égale distance des deux, si α varie la droite D enveloppe la courbe (1).

Nous avons vu que les points de contact de toutes les courbes du faisceau diamétral sont sur le diamètre correspondant aux tangentes, par suite, le point de contact de la droite D sera le milieu du diamètre ; on peut donc encore considérer la courbe (1) comme le lieu des milieux des diamètres de la courbe Π. Pour abréger, nous allons appeler cette courbe *la médiale* de la courbe considérée.

De l'équation (1) on tire l'équation du rayon de courbure $\bar{\rho}$ en fonction de l'angle α de la tangente

$$(2) \qquad \bar{\rho} = \rho - \frac{1}{2}(\mathfrak{L} + \mathfrak{L}'') = \frac{1}{2}\left[\rho(\alpha) - \rho(\alpha + \pi)\right].$$

Les centres de courbure des courbes du faisceau diamétral se trouvent sur le diamètre correspondant de la développée de la courbe Π (voir n° **23**), il en résulte qu'en un point quelconque le centre de courbure de la médiale est le milieu du diamètre de la développée de la courbe Π, correspondant aux tangentes considérées. On obtient donc la développée de la médiale en déterminant la médiale de la développée de la courbe Π.

Considérons une courbe Π telle qu'en chaque point p' soit continue, la médiale de cette courbe est une courbe continue. Au point où p'' est déterminé le rayon de courbure de la médiale sera déterminé, et si p'' et par suite ρ sont continus, le rayon de courbure de la médiale le sera aussi.

Si le rayon de courbure d'une courbe Π est une fonction continue pour tous les points, celui de sa médiale le sera aussi, et

comme en outre cette dernière est une courbe Π_0, elle aura, d'après le n° **13** un nombre *impair de points de rebroussement* de première espèce, et, de plus, son rayon de courbure peut devenir nul, sans changer de signe, un nombre quelconque de fois.

De l'équation (2) de la médiale on déduit immédiatement que deux courbes parallèles (a) et (b) ont la même médiale,

$$(a) \qquad \rho_1 = \rho \qquad\qquad (b) \qquad \rho_2 = \rho + k\,;$$

de même la médiale de deux courbes diamétrales (c) et (d) est nécessairement la même :

$$(c) \qquad \rho_1 = \rho \qquad\qquad (a) \qquad \rho_2 = \rho + \lambda(\mathfrak{L} + \mathfrak{L}'')$$

Nous avons vu que si le rayon de courbure de la médiale est nul on a $\rho(\alpha) = \rho(\alpha + \pi)$ et d'après la formule (3) du n° **19** $q_1 = \frac{\mathfrak{D}}{2}$, par suite la *courbe enveloppe des diamètres passe par les points de rayon de courbure nul de la médiale.*

Comme à un faisceau de courbes parallèles correspond une seule médiale, et tout un faisceau de courbes enveloppes des diamètres, il en résulte que toutes les courbes de ce faisceau de courbes enveloppes des diamètres passent par les points de rayon de courbure nul de la médiale.

Considérons le faisceau de courbes parallèles :

$$\bar{p} = p + k$$

où k peut prendre toutes les valeurs réelles on a :

$$\tau = \text{arc tg}\,\frac{\mathfrak{L} + 2K}{\mathfrak{L}'} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{L}' \not\equiv 0$$

il en résulte que si K tend plus ou moins vers l'infini on a :

$$\tau = \pm \frac{\pi}{2}$$

c'est-à-dire que dans les deux positions limites, le diamètre sera perpendiculaire aux tangentes passant par ses extrémités, et par suite également à la tangente à la médiale ; comme il passe de plus par le point correspondant de cette dernière, il en résulte, qu'il se confondra avec la normale à la médiale.

On en conclue que *si* K *augmente, ou diminue indifféremment la courbe enveloppe des diamètres tend à se confondre avec la développée de la médiale.*

Soit une courbe Π en coordonnées tangetielles polaires :

$$p = F_1(\alpha) + F_2(\alpha) \tag{3}$$

où F_1 et F_2 sont des fonctions quelconques telles que :

$$F_1(\alpha + \pi) \equiv -F_1(\alpha) \qquad \text{et} \qquad F_2(\alpha + \pi) \equiv F_2(\alpha)$$

d'après l'équation (1) $p_1 = F_1(\alpha)$ est la médiale de la courbe (3) et d'après la formule (1) du n° **21** $p_2 = F_2(\alpha)$ sera sa centrique.

Remarque. — Dans le cas particulier où F_1 et F_2 sont des polynomes entiers de degré $2n + 1$ et $2m$ en sin α ou en cos α d'après le n° **8** la médiale est une courbe rationnelle de classe $4n + 2$, la centrique de classe $4m$ au plus ; si F_1 est le même polynome que précédemment et F_2 la racine carrée d'un polynome entier de degré $2m$ en sin α et cos α la centrique est de classe $2m$ au plus.

Dans les deux cas la classe de la courbe sera au plus égale à la plus élevée des deux classes de sa médiale et de sa centrique.

Il résulte de la formule (4) du n° **23** que *l'aire algébrique de la médiale est la différence des aires algébriques de la courbe* et de la centrique correspondante.

Nous avons vu au n° **16** que l'aire algébrique d'une courbe dont la longueur algébrique est nulle est négative, comme la médiale est une courbe Π_0, donc de longueur algébrique nulle, son aire algébrique sera négative ; il en résulte que l'aire de la centrique est plus grande que l'aire des courbes qui en dérivent c'est-à-dire que *du faisceau de courbes admettant la même centrique, c'est la centrique elle-même dont l'aire est maximum.*

25. A chaque courbe Π correspond une médiale déterminée, mais à une médiale donnée correspondent une infinité de courbes Π ; en effet soit l'équation tangentielle polaire de la médiale $\bar{p} = f(\alpha)$, l'équation générale des courbes dont la médiale est la courbe donnée est d'après la formule (1) du n° **24**.

$$p = \bar{p} + \frac{\mathfrak{L}}{2} \qquad \bar{\alpha} = \alpha \tag{1}$$

où $\mathfrak{L}$ est une fonction uniforme quelconque de α, telle que $\mathfrak{L}'$ existe pour toutes les valeurs de α et $\mathfrak{L}(\alpha) \equiv \mathfrak{L}(\alpha + \pi)$, dans ces conditions, la courbe $p_2 = \frac{\mathfrak{L}}{2}$ est la centrique de la courbe (1) ; on en conclue *qu'à une médiale et à une centrique données correspond une et une seule courbe*, dont l'équation en coordonnées ρ, α est la suivante :

$$\rho = \bar{\rho} + R \tag{2}$$

où $\bar{\rho}$ et R sont les rayons de courbure de la médiale et de la centrique données en fonction de α.

Pour abréger disons que la courbe (2) est la courbe résultante de la composition d'une médiale et d'une centrique. On peut dire alors que le rayon de courbure de la courbe résultante est égale à la somme algébrique des rayons de courbure correspondants à la même valeur de α des courbes composantes. De même le vecteur de la podaire, le rayon de courbure de l'antiradiale-tangentielle, le vecteur tangentiel de la radiale tangentielle de la courbe résultante seront la somme des grandeurs correspondant à la même direction α, des courbes composantes. Rappelons encore qu'après le n° **24** l'aire algébrique de la courbe résultante est égale à la somme des aires algébriques des courbes composantes.

La courbe résultante sera convexe si l'on a pour toutes les valeurs de α, $p\rho \geqq 0$ ce qui arrive nécessairement si la centrique est convexe, et si son rayon de courbure minimum est plus grand que le rayon de courbure maximum de la médiale.

Si dans un intervalle $[\alpha_1, \alpha_2]$ on a constamment $\bar{\rho} + R = 0$, la courbe résultante présentera dans cet intervalle un point anguleux ; dans l'intervalle $[\alpha_1 + \pi, \alpha_2 + \pi]$ l'arc de la courbe résultante et celui de la centrique seront des arcs semblables.

Pour déterminer l'équation de la développée d'une courbe correspondant à une médiale et à une centrique données il suffit de différencier par rapport à α, ρ donné par l'équation (2) on a alors :

$$\rho' = \bar{\rho}' + R' \tag{3}$$

par suite la médiale et la centrique de la courbe (3) sont les développées de la médiale, et de la centrique de la courbe (2).

Etant données une courbe Π_0 et une courbe à centre Π, *construisons la courbe* excentrique dont la médiale et la centrique sont les deux courbes données. Menons en un point P de la médiale la tangente à cette dernière, soit α la direction de cette tangente, menons ensuite la tangente de direction α à la centrique, puis le diamètre de la centrique correspondant à cette tangente, soit $\mathfrak{D}$ la longueur de ce diamètre, menons par le point P, une parallèle à ce diamètre, et portons sur cette droite, depuis P une longueur PM égale à $\frac{\mathfrak{D}}{2}$ si l'on fait alors varier le point P le lieu de M est la courbe cherchée.

Remarquons que deux médiales identiques mais *orientées différemment* relativement à la centrique se comportent en général comme deux médiales différentes. En effet considérons l'équation suivante :

$$\rho = \bar{\rho}(\alpha + \varepsilon) + R(\alpha) \tag{4}$$

si ε est un paramètre variable elle représente un faisceau de courbes dont les centriques et les médiales sont les mêmes courbes, mais ces dernières sont orientées différemment relativement à la centrique : ces courbes (4) sont en général différentes, mais elles ont toutes *la même aire et la même longueur algébriques* ; de plus à cause de l'équation (3) l'aire algébrique des développées de ces courbes est aussi la même.

De l'identification de l'équation (2) du présent numéro et de l'équation (1) du n° **22**, il résulte que le rayon de courbure de la médiale est déterminé si l'on donne la centrique $p = \frac{\mathfrak{L}(\alpha)}{2}$ ou $\rho = R$, et le rayon de courbure de la courbe enveloppe des diamètres $\mathfrak{R}$, en fonction de l'angle σ de sa tangente :

$$\bar{\rho} = -R \int_{\sigma}^{\pi+\sigma} \frac{\mathfrak{R}\, d\sigma}{\mathfrak{D}} \tag{5}$$

et inversement ;

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{D} \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\bar{\rho}}{2R}\right). \tag{6}$$

Comparons cette formule (6) qui donne le rayon de courbure de la courbe enveloppe des diamètres en fonction des rayons de cour-

bure de la médiale et de la centrique correspondantes à la formule (2) du n° **20** ; en remarquant que ρ est le rayon de courbure de la courbe, et $\bar{\rho}$ celui de sa médiale, les quantités sous le signe différentiel ne diffèrent que par une constante.

La formule (5) montre que la condition (2) du n° **22** se réduit à $\varepsilon^2 > -\frac{\bar{\rho}}{R}$, donc, si le rayon de courbure de la médiale est fini, et si celui de la centrique est plus grand que zéro pour toutes les valeurs de α, sauf toutefois pour celles telles que le rayon de courbure de la médiale soit en même temps nul, il sera possible de choisir ε assez grand pour que la courbe résultante soit convexe.

26. Soit une courbe Π quelconque, menons la tangente correspondant à une direction α, puis le diamètre correspondant à cette tangente. Faisons correspondre à ce diamètre la demi-courbe, qui est parcourue par le point de contact lorsque α varie de α à $\alpha + \pi$. Soit C_1 le barycentre de courbure de cette demi-courbe, lorsque α varie, C_1 décrit une courbe ; il est facile de voir que cette courbe est une courbe à centre fermée, dont le centre est C le barycentre de courbure de la courbe Π entière : en effet si l'on désigne par C_2 le barycentre de courbure de la demi-courbe complémentaire, C_2 est aussi un point de la courbe barycentrique, et le point C est nécessairement au milieu du segment de droite C_1C_2.

Si nous désignons par ξ, η les coordonnées cartésiennes du point C_1 rapporté à un système ayant son origine au pôle, l'axe des X coïncidant avec l'axe polaire, on a :

$$\xi_1 = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\pi+\alpha} x d\alpha \quad ; \quad \eta_1 = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\pi+\alpha} y d\alpha ;$$

pour déterminer la tangente au point C_1 différentions ξ et η par rapport à α on a alors :

$$\frac{d\xi}{d\alpha} = \frac{\mathfrak{D}}{\pi}\cos\sigma \quad ; \quad \frac{d\eta}{d\alpha} = \frac{\mathfrak{D}}{\pi}\sin\sigma \quad ; \quad \frac{d\eta}{d\xi}\,\mathrm{tg}\,\sigma$$

par suite la tangente à *cette courbe est parallèle au diamètre correspondant* ; pour déterminer l'équation naturelle de la courbe décrite par C_1 différentions encore $\frac{d\xi}{d\alpha}$ et $\frac{d\eta}{d\alpha}$, on obtient en utilisant les for-

mules du n° **18**.

$$\frac{d^2\xi}{d\alpha^2} = -\frac{\mathfrak{L} + \mathfrak{L}''}{\pi} \cos \alpha \quad ; \quad \frac{d^2\eta}{d\alpha^2} = -\frac{\mathfrak{L} + \mathfrak{L}''}{\pi} \sin \alpha$$

et finalement la courbe barycentrique a pour équation :

$$(1) \qquad \bar{\rho} = \frac{\mathfrak{D}}{\pi} \frac{d\alpha}{d\sigma} = \frac{(\mathfrak{L}^2 + \mathfrak{L}'^2)^{\frac{3}{2}}}{\pi \mathfrak{L} (\mathfrak{L} + \mathfrak{L}'')}$$

on en conclue immédiatement : (I) que la longueur algébrique de cette courbe est ;

$$\mathfrak{L}_a = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mathfrak{D} d\alpha$$

c'est-à-dire que la longueur algébrique est le double de la valeur moyenne des diamètres de la courbe II ; (II) que si la courbe primitive est une courbe convexe fermée, la courbe (1) l'est également ; (III) qu'à deux courbes diamétrale de coefficient de proportionnalité $(1 + 2\lambda)$ correspondent des courbes (1) semblables dont le coefficient de proportionnalité est aussi $(1 + 2\lambda)$; (IV) qu'à des courbes admettant la même centrique correspond la même courbe (1).

27. Comme exemple le plus simple des courbes dérivant d'une centrique donnée, envisageons la famille des *courbes dont la centrique est le cercle ;* il résulte des considéaations du n° **22** que ces courbes ont toutes la même longueur algébrique que le cercle; que la distance des tangentes dont la direction diffère de π est constante.

Les courbes convexes ayant comme centrique le cercle auront la même longueur absolue que le cercle et en plus la même « largeur » en chaque sens. Jusqu'en 1778 on croyait que le cercle seul possède cette propriété, *Euler* a montré à cette époque [1] que les développantes convexes des courbes triangulaires, c'est-à-dire des courbes continues fermées à trois points de rebroussement sans

[1] Euler. De curvis triangularibus. Acta Academia Petropolitanea, 1778, pars posterior, p. 3-30.

points d'inflexion, (1) partagent cette propriété avec le cercle « quae proprietas vulgo circulo tam propria esse videtur, ut vix in alias lineas curvas competere posse videatur. »

C'est à cause de cette propriété qu'Euler a nommé ces courbes *orbiformes* (2).

Après avoir montré que toutes les normales des orbiformes sont des normales doubles, en partant de cette propriété et de la précédente, il a établi l'équation générale des orbiformes, puis supposant inversement que les développées des orbiformes sont nécessairement des courbes triangulaires, il a pensé de déterminer l'équation des courbes triangulaires, en déterminant l'équation générale des développées des orbiformes (3). (Nous verrons que cette supposition est inexacte, car la développée d'une orbiforme peut être une courbe Π_0 quelconque).

Il semble qu'Euler n'a pas connu la propriété remarquable des orbiformes à savoir que leur longueur est égale à la longueur du cercle de même diamètre.

Plus tard *Puiseux* et *Barbier* ont retrouvé les orbiformes, probablement sans avoir eu connaissance du travail d'Euler. Puiseux a mis en évidence qu'il existe des courbes, qui, comme le cercle, ont la même « largeur » en tous sens, en citant l'exemple suivant : (voir Barbier, *Sur le problème de l'aiguille et le jeu du joint couvert.* Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1860, p. 273-288).

« Le grand axe partage une ellipse en deux parties supperposables, considérons l'une des moitiés, et sur toutes ses normales portons une longueur égale au grand axe de l'ellipse : le lieu des

(1) Curvas triangulares voco, quæ tribus arcubus AB, AC et BC intus inflexis constant, qui in angulis A, B et C coeant, præterea autem nullos alios ramos contineant. Huiusmodi ergo curvæ ut sint continuæ, sive quapiam aequatione, vel algebraica, vel etiam transcendente, exprimi queant, necesse est, ut in angulis A, B et C habeant cuspides acutissimas, ubi bini arcus coeantes communi tangente sint præditi, »

(2) Orbiformes sunt « curvæ ex evolutione curvarum triangularium natæ. »

(3) Euler de curvis triangularibus ibid. p. 11. Ex hac constructione generali in qua continentur omnes curvæ orbiformes et quidem simplices, quæ post unam revolutionem in se redeunt, facile erit formulas elicere pro descriptione curvarum triangularium ; cum enim evolutæ harum curvarum orbiformium certæ sint figuræ triangulares, tantum opus est, ut in evolutas istarum curvarum inquiramus.

points ainsi déterminés se raccorde toujours avec la demi ellipse et l'ensemble donne souvent une ligne convexe d'une largeur égale au grand axe de l'ellipse dans tous les sens. »

Si l'on désigne par $2a$ et $2b$ le grand et le petit axe de l'ellipse, la courbe de Puiseux sera convexe si l'on a

$$2b > a,$$

La courbe enveloppe des diamètres de cette courbe est la moitié de la développée de l'ellipse, cette moitié forme une courbe discontinue du type Π_0, en effet ρ et par suite p'' sont discontinues aux

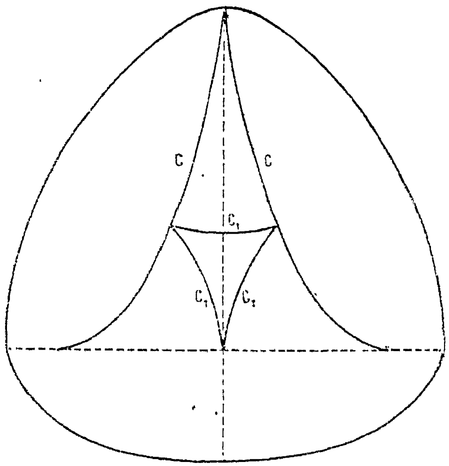


Fig. 2. — C courbe enveloppe des diamètres ; C_1 médiale.

points de la courbe correspondant au grand axe de l'ellipse. La médiale par contre est une courbe fermée continue, mais son rayon de courbure est discontinu au point de la médiale correspondant au grande axe de l'ellipse (*fig.* 2).

Barbier a considéré les orbiformes comme les développantes des courbes obtenues de la manière suivante :

« Considérons un arc convexe, dont la flexion totale soit de 180 degrés; on peut décomposer cet arc en parties qu'on réunit par des points de rebroussement de première espèce, de manière à obtenir une courbe fermée composée d'arcs convexes séparés par des rebroussements de première espèce. »

Remarquons que la courbe ainsi obtenue est précisément une courbe Π_0. Barbier a déterminé la longueur des orbiformes par des considérations de probabilité géométrique.

Notre formule générale des courbes dérivant d'une centrique donnée ((1) du n° **25**) dans le cas où cette centrique est un cercle, devient, en coordonnées tangentielles polaires

$$p = \bar{p} + \frac{K}{2} \tag{1}$$

où K est une constante, $\bar{p}$ une fonction quelconque définissant une courbe Π_0 (voir n° **13**).

La courbe représentée par l'équation tangentielle $\bar{p} = f(\alpha)$ sera la médiale de la courbe (1).

De l'équation (1) on tire l'équation en coordonnées ρ, α de ces courbes

$$\rho = \bar{\rho} + \frac{K}{2} \tag{2}$$

où $\bar{\rho}$ est une fonction quelconque de α définissant une courbe Π_0. La courbe $\bar{\rho} = f_1(\alpha)$ sera l'équation naturelle de la médiale de la courbe (2). Si $\frac{K}{2}$ est plus grand que le rayon de courbure maximum de la médiale, la courbe (2) sera convexe.

La formule (1) du n° **2** fournit l'équation cartésienne de ces courbes sous forme paramétrique :

$$\begin{cases} x = \left(\bar{p} + \frac{K}{2}\right) \sin\alpha + \bar{p}' \cos\alpha \\ y = \bar{p}' \sin\alpha - \left(\bar{p} + \frac{K}{2}\right) \cos\alpha \end{cases} \tag{3}$$

donc selon que $\bar{p}$ est une fonction algébrique, ou rationnelle de $\sin\alpha$ ou de $\cos\alpha$, la courbe (3) est une courbe algébrique, ou rationnelle.

Si l'équation de la médiale est de degré $2m + 1$ en $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$ la courbe est au plus de classe $4m + 2$.

Les courbes dont la centrique est un cercle ont des propriétés remarquables ; de leur définition $\mathfrak{L} = K$, où K est une constante il résulte en effet que dans ces courbes les diamètres ont une lon-

gueur constante,

$$\mathfrak{D} = \sqrt{\mathfrak{P}^2 + \mathfrak{P}'^2} = K.$$

de plus les tangentes aux extrémités des diamètres sont perpendiculaires à ces diamètres, par suite les diamètres sont des normales doubles de la courbe, et toutes les normales de la courbe sont des normales doubles ; en effet on a trouvé au n° **18**

$$\operatorname{tg} \tau = -\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{P}'} = -\frac{\mathfrak{D}}{\dfrac{d\mathfrak{D}}{d\sigma}}$$

de la condition $\mathfrak{P} = K$ il résulte immédiatement que $\mathfrak{D} = K$ et $\tau = \frac{\pi}{2}$ et inversement si $\mathfrak{D} = K$ ou $\tau = \frac{\pi}{2}$ on a nécessairement $\mathfrak{P} = K$. Pour abréger nous appellerons les courbes Π, dont la centrique est un cercle, courbes à *diamètre constant*. Les *orbiformes sont des courbes convexes à diamètre constant.*

La distance des centres de courbure opposés étant égale à la longueur du diamètre de la développée on a

$$\mathfrak{D}_1 = \sqrt{\mathfrak{P}'^2 + \mathfrak{P}''^2} = 0$$

donc dans les courbes à diamètre constant les centres de courbure des points opposés coïncident ; inversement de $\mathfrak{D}_1 = 0$ il résulte que $\mathfrak{P}'^2 + \mathfrak{P}''^2 = 0$ ou $\mathfrak{P} = K$. De l'équation (2) on tire

$$\rho(\alpha) + \rho(\alpha + \pi) = K$$

c'est-à-dire que la somme algébrique des deux rayons de courbure opposés est constante, elle est de plus égale au diamètre du cercle qui est la centrique de la courbe. Inversement si dans une courbe fermée on a constamment

$$\rho(\alpha) + \rho(\alpha + \pi) = K$$

ce qui revient à

$$\mathfrak{P} + \mathfrak{P}'' = K$$

la résolution de cette équation différentielle donne

$$\mathfrak{P} = c_1 \sin \alpha + c_2 \cos \alpha + K.$$

La condition nécessaire

$$\mathfrak{L}(\alpha) \equiv \mathfrak{L}(\alpha + \pi) \text{ exige que } \begin{matrix} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{matrix} \text{ donc } \mathfrak{L} = \mathrm{K}.$$

Les seules courbes Π *pour lesquelles la somme des rayons de courbure opposés est constante sont les courbes à diamètre constant.*

Pour obtenir la courbe enveloppe des diamètres des courbes à diamètres constants, faisons dans la formule générale (4) du n° **25**

$$\mathfrak{D} = 2\mathrm{R} = \mathrm{K} \qquad d\alpha = d\sigma$$

l'équation de la courbe enveloppe des diamètres sera alors en coordonnées naturelles

$$(4) \qquad \mathfrak{R} = \frac{d\bar{\rho}}{d\alpha} \quad ; \quad \sigma = \alpha + \frac{\pi}{2}$$

cette formule montre que la courbe enveloppe des diamètres est dans ce cas, la développée de la médiale, ce sera bien une courbe du type Π_0 car nous avons montré au n° **13** que les développées des courbes Π_0 sont des courbes Π_0.

De l'équation (2) d'une courbe à diamètre constant il résulte que sa développée est en même temps la développée de sa médiale, et d'après ce que nous venons de voir elle est aussi la courbe enveloppe de ses diamètres.

La courbe à diamètre constant est donc une courbe parallèle à sa médiale, et *toutes les courbes parallèles aux courbes* Π_0 *sont des courbes à diamètres constants.*

L'équation générale des courbes dérivant d'une courbe enveloppe de diamètres et d'une centrique se simplifie si la centrique est un cercle (équation (1) du n° **22**)

$$\rho = \frac{\mathrm{K}}{2} - \frac{1}{2}\int_{\sigma}^{\pi+\sigma} \mathfrak{R}\, d\sigma$$

donc les développantes convexes des courbes Π_0 *sont des orbiformes.*

Nous avons vu que si l'on transforme une courbe Π en sa radiale tangentielle (n° **14**), la distance des tangentes opposées étant $\mathfrak{L}$ avant la transformation, devient $\mathfrak{L} + \mathfrak{L}''$ après, on en conclue immédiatement que la radiale tangentielle d'une courbe à diamètre constant est une autre courbe à diamètre constant, dont la lon-

gueur est la même que celle du diamètre de la courbe primitive; si l'équation de cette dernière est $\overline{p} = p + K$, la courbe transformée aura pour équation $\overline{p}_1 = p + p'' + K$. Tandis que la radiale tangentielle d'une orbiforme n'est pas nécessairement une courbe convexe, l'antiradiale tangentielle de cette courbe relative à son barycentre de courbure est toujours une courbe à diamètre constant convexe, donc une orbiforme (voir n° **15**).

La longueur algébrique de la courbe à diamètre constant est égale à la longueur de sa centrique, le cercle de diamètre K. L'aire de la courbe est donnée par la formule générale du n° **4**.

Les orbiformes d'Euler, les courbes ayant la même largeur en tous sens de Puiseux et de Barbier sont identiques aux courbes convexes à diamètre constant. Résumons les propriétés des orbiformes : ce sont des courbes convexes fermées présentant la même « largeur » en chaque sens, elles sont à diamètre constant; leur longueur est la même, elle est égale à celle d'un cercle de même diamètre; toutes les normales de la courbe sont des normales doubles; les angles que les tangentes font avec les diamètres passant par leur point de contact sont tous égaux à $\frac{\pi}{2}$.

La développée de l'orbiforme est en même temps la développée de sa médiale et la courbe enveloppe de ses diamètres. Donc, l'orbiforme est une courbe parallèle à sa médiale.

Toutes les courbes convexes parallèles à une courbe Π_0 sont des orbiformes, de même toutes les développantes convexes des courbes Π_0 sont des orbiformes.

L'antiradiale tangentielle d'une orbiforme relative au barycentre de courbure de cette dernière est toujours une orbiforme.

Remarque. — Menons la tangente de direction α à une orbiforme, soit M le point de contact de cette tangente, puis menons les tangentes de direction

$$\alpha + \frac{\pi}{2}, \quad \alpha + \pi \qquad \text{et} \qquad \alpha + \frac{3\pi}{2}$$

les quatre sommets du carré obtenu sont sur la courbe orthoptique de l'orbiforme, menons les normales à l'orbiforme aux points de contact de ces tangentes, soit I leur point d'intersection; comme toutes les normales de l'orbiforme sont des normales doubles, c'est

un point quadruple; si le point M se déplace sur la courbe, I est le centre instantané de rotation de ce mouvement, donc les normales à la courbe orthoptique aux quatre sommets du carré passent par ce point. Le lieu de ces points I est la courbe orthoptique de la développée de l'orbiforme; nous avons vu que cette développée est une courbe Π_0. Remarquons que dans le cas particulier où elle est une hypocycloïde à $2n+1$ points de rebroussement, le lieu de I est un cercle.

Menons les diagonales du carré considéré précédemment et déterminons la courbe enveloppée par ces diagonales : prenons M comme pôle et la tangente en M comme axe polaire mobile, les coordonnées de la diagonale seront par rapport à ce système mobile :

$$\alpha_0 = -\frac{\pi}{4} \qquad\qquad p_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(p - p_1)$$

où p, α sont les coordonnées de la tangente en M relatives au système fixe, et $p_1(\alpha) \equiv p\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$; d'après la formule (2) du n° **5**, la courbe enveloppe des diagonales sera définie sous forme paramétrique par :

$$\bar{p} = \frac{1}{\sqrt{2}}(p - p_1)$$

$$\bar{\alpha} = \alpha - \frac{\pi}{4}.$$

On voit que cette courbe est une courbe Π_0.

Pour obtenir les points de contact de cette courbe, situés sur les diagonales correspondant au point M, il suffit d'abaisser, du point I, centre instantané de rotation de ce mouvement, des perpendiculaires sur ces diagonales, les pieds des perpendiculaires seront les points cherchés.

28. Au numéro précédent nous avons considéré une centrique donnée que nous avons combinée avec des courbes de diamètres pour avoir des courbes Π excentriques; passons maintenant au problème inverse et déterminons la courbe enveloppe des diamètres, la centrique, et la médiale, d'une courbe convexe fermée donnée.

Prenons comme exemple une courbe historique, le folium simple (voir la *fig.* 3) ; cette courbe a déjà été considérée par Képler dans son *Astronomia Nova*, puis par Longchamps, *Géométrie de la Règle*, 1890. Son équation en coordonnées polaires ponctuelles r, φ est la suivante :

$$r = 16\lambda \cos^3\varphi \tag{1}$$

c'est une podaire de l'hypocycloïde à trois points de rebroussement ; en effet, l'équation tangentielle polaire $p = a\cos^3\alpha$ représente une telle hypocycloïde, le pôle étant à l'un de ses points de rebroussement.

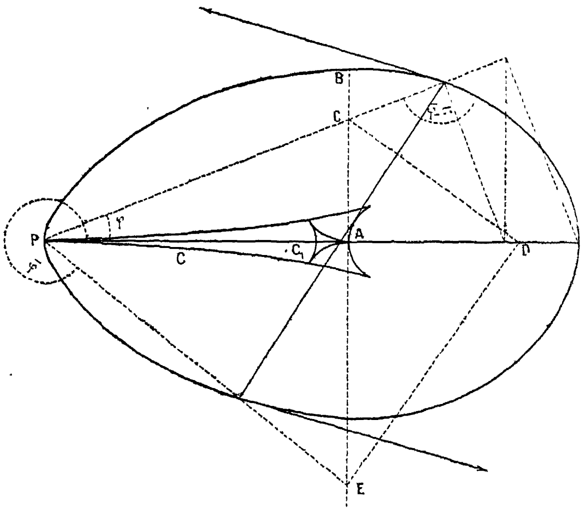


Fig. 3. — C courbe enveloppe des diamètres ; C_1 médiale.

L'équation cartésienne du folium est :

$$(x^2 + y^2)^2 - 16\lambda x^3 = 0 \tag{2}$$

et son équation tangentielle

$$27\lambda^2 v^4 + 2\lambda u(9v^2 + 8u^2) - (v^2 + u^2) = 0 \tag{3}$$

on en tire l'équation tangentielle polaire par les formules du n° **7**, et l'on a :

$$p = \lambda\left\{9\sin\alpha - \sin^3\alpha + (4 - \cos^2\alpha)^{\frac{3}{2}}\right\} \tag{4}$$

enfin son équation naturelle en coordonnées ρ, α sera, comme $\rho = p + p''$

(5) $\rho = 2\lambda \left\{ -\sin 3\alpha + (2 + 11 \cos^2\alpha - 4 \cos^4\alpha)(4 - \cos^2\alpha)^{-\frac{1}{2}} \right\}$

Considérons l'équation du folium en coordonnées polaires ponctuelles ; en désignant par θ l'angle que le rayon vecteur fait avec la tangente, on a

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{r}{r'} = -\frac{1}{3 \operatorname{tg} \varphi}$$

il en résulte si α est l'angle de la tangente avec l'axe polaire,

$$\alpha = \theta + \varphi$$

et

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3 \operatorname{tg}^2 \varphi - 1}{4 \operatorname{tg} \varphi}$$

ou

$$3 \operatorname{tg}^2 \varphi - 4 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \varphi - 1 = 0$$

donc à une valeur donnée de $\operatorname{tg} \alpha$ correspondent deux valeurs de $\operatorname{tg} \varphi$ et l'on a *la relation remarquable* suivante, indépendante de α.

$$\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \bar{\varphi} = -\frac{1}{3}$$

φ et $\bar{\varphi}$ représentent les amplitudes ponctuelles de deux points dont les tangentes sont opposées, c'est-à-dire des points situés sur le même diamètre.

Cette relation permet de construire géométriquement les points opposés ; en effet élevons une perpendiculaire sur l'axe polaire en A à la distance 9λ du pôle P, la demi-droite passant par P et faisant un angle de 30 degrès avec l'axe polaire rencontrera cette perpendiculaire en B, et l'on aura $AB = 3\sqrt{3}\,\lambda$; le point B sera un point de la courbe, pour lequel la tangente sera parallèle à l'axe polaire. Portons de A sur cette axe une longueur AB, soit D le point obtenu. Si l'on mène par P une demi-droite faisant avec l'axe polaire un angle φ, elle rencontrera la droite AB en C, relions CD et menons par D une perpendiculaire sur CD, elle rencontrera la droite AB en E ; le vecteur PE fera avec l'axe polaire un angle $\bar{\varphi}$.

Ainsi l'amplitude $\bar{\varphi}$ du point opposé au point de coordonnées r, φ se trouve construit.

La construction d'un point correspondant à une amplitude φ donnée est très simple : on porte sur l'axe polaire une longueur $PM = 16\lambda$, puis on projette le point M sur la direction φ, soit M_1 le point obtenu, on le projette sur l'axe polaire et l'on obtient ainsi le point M_2, enfin la projection de ce dernier sur la direction φ donne le point M_3 cherché. Pour construire la tangente au point M_3 on remarque que $\operatorname{tg} \bar{\theta} = - \operatorname{tg} \bar{\varphi}$ et par suite $\theta = \bar{\varphi} - \pi$ ou bien on utilise la relation trouvée par Longchamps, (Geometrie de la Règle, p. 127) qui donne le point d'intersection N de la normale en M_3, avec l'axe polaire

$$PN = \frac{3}{4} PM_2.$$

Mentionnons encore la relation existant entre deux rayons de courbure opposés du Folium :

$$\rho(\alpha)\rho(\alpha + \pi) = \left[18\lambda \cot (\varphi - \bar{\varphi})\right]^2.$$

Revenons à l'équation tangentielle polaire du folium (4), les termes de degré impair en $\sin \alpha$ forment comme nous avons vu au (3) du n° **24**, la médiale de la courbe

$$p = \lambda(9 \sin \alpha - \sin^3 \alpha)$$

par suite *la médiale du folium est une hypocycloïde à trois points de rebroussement.*

Si nous prenons le pôle comme l'origine des coordonnées cartésiennes rectangulaires, et l'axe polaire comme axe des X, les coordonnées des trois points de rebroussement de la médiale seront

$$(6) \qquad \begin{cases} x = 9\lambda \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{63}{8}\lambda \\ y = \pm \dfrac{3\sqrt{3}}{8}\lambda. \end{cases}$$

La médiale rencontre l'axe polaire au point de coordonnées

$$x = 8\lambda \quad \text{et} \quad y = 0.$$

Les termes de degré pair en sin α ou cos α de l'équation (4) du folium donnent la centrique de cette courbe (voir n° **22** et (3) du n° **24**).

$$p = \lambda(4 - \cos^2 \alpha)^{\frac{3}{2}}. \tag{7}$$

De cette équation on tire à l'aide des formules du n° **7** l'équation tangentielle pluckérienne

$$(u^2 + v^2)^2 = \lambda^2(4u^2 + 3v^2)^3$$

c'est une courbe de sixième classe ; sa polaire réciproque relative au cercle de rayon *un* ayant l'origine comme centre, est une courbe connue, en effet de

$$(x^2 + y^2)^2 = \lambda^2(4x^2 + 3y^2)^3$$

il résulte que la *polaire réciproque de la centrique du folium est la radiale d'une ellipse*, les axes de cette dernière sont :

$$a = \frac{1}{6\lambda} \qquad b = \frac{1}{4\lambda\sqrt{3}}. \tag{8}$$

Comme le folium est une courbe convexe, sa centrique le doit être aussi, (voir n° **21**) ainsi que la polaire réciproque de cette dernière d'après le n° **10** A ; donc la courbe ci-dessus doit être une courbe convexe ; on peut s'assurer que la radiale d'une ellipse est une courbe convexe si l'on a

$$b \leqq a \leqq b\sqrt{\frac{3}{2}}$$

les valeurs (8) de a et b satisfont à cette inégalité.

Il nous reste à déterminer la courbe enveloppe des diamètres du folium. Son équation tangentielle polaire sous forme paramétrique est d'après les formules générales du n° **19**.

$$\bar{p} = \frac{-27\lambda\cos^3\alpha}{\sqrt{16 + \cos^2\alpha - 8\cos^4\alpha}} \quad ; \quad \operatorname{tg}\bar{\alpha} = \frac{-\cos\alpha(1 + 2\cos^2\alpha)}{2\sin\alpha(2 + \cos^2\alpha)}$$

on en tire son équation en coordonnées u, v sous forme paramétrique :

$$u = \frac{1 + 2\cos^2\alpha}{27\lambda\cos^2\alpha} \qquad v = -\frac{2\sin\alpha(2 + \cos^2\alpha)}{27\lambda\cos^3\alpha}.$$

Comme u et v sont des fonctions rationnelles de sin α et de cos α il en résulte que cette courbe est aussi une courbe rationnelle en coordonnées cartésiennes x, y. Après l'élimination de α on a

$$27\lambda^2 v^2 = 4(9\lambda u - 1)(18\lambda u - 1)^2$$

c'est une courbe de troisième classe, elle a une tangente double, à points de contact imaginaires, et trois points de rebroussement réels ; c'est donc une courbe d'ordre 4.

Sa *polaire réciproque est une courbe connue, la parabola punctata de Newton* :

$$y^2 = 332\lambda\left(x - \frac{1}{9\lambda}\right)\left(x - \frac{1}{18\lambda}\right)^2.$$

En coordonnées cartésiennes la courbe enveloppe des diamètres devient :

$$(9) \quad 288y^4 + 3y^2 \{ 71x^2 - 1620\lambda x + 8748\lambda^2 \} + (x - 9\lambda)x^3 = 0.$$

Les coordonnées des points de rebroussement de cette courbe sont

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{162}{17}\lambda \\ y = \pm \dfrac{27\sqrt{2}}{34}\lambda. \end{cases}$$

D'après ce que nous avons vu au n° **24**, les points de rebroussement de la médiale doivent être sur la courbe enveloppe des diamètres, on peut s'assurer, que dans ce cas leurs coordonnées données par les formules (6) satisfont, en effet, à l'équation (9) ci-dessus.

29. Déterminons maintenant l'équation d'une courbe convexe excentrique admettant comme médiale et comme centrique deux courbes données.

Prenons comme médiale l'hypocycloïde suivante à 3 points de rebroussement :

$$p = \varepsilon \sin^3 \alpha$$

et comme centrique l'ellipse :

$$p = (a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha)^{\frac{1}{2}}$$

la courbe excentrique admettant comme médiale et comme centrique ces deux courbes sera d'après le n° **25**.

$$p = \varepsilon \sin^3 \alpha + (a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha)^{\frac{1}{2}}$$

ou en coordonnées tangentielles u, v

$$[u^2 + v^2 - \varepsilon u^3]^2 = (a^2 v^2 + b^2 u^2)(u^2 + v^2)^2 ;$$

en disposant de ε, on peut rendre la courbe convexe, en effet d'après ce que nous avons vu au n° **25**, si le rayon de courbure minimum de l'ellipse est plus grand que le rayon de courbure maximum de l'hypocycloïde, c'est-à-dire $\frac{b^2}{a} \geqq 2\varepsilon$ la courbe sera sûrement convexe.

Montrons encore que suivant l'orientation d'une médiale donnée, on obtient avec la même centrique des courbes différentes. Prenons comme exemple, la centrique du folium donnée par la formule (7) du n° **27**, et l'hypocycloïde suivante :

$$p = -\lambda \cos^3 \alpha$$

c'est-à-dire la médiale du folium tournée de $\frac{\pi}{2}$; la courbe résultante de cette combinaison sera en coordonnées tangentielles polaires :

$$p = -\lambda \cos^3 \alpha + \lambda (4 - \cos^2 \alpha)^{\frac{3}{2}}$$

ou en coordonnées tangentielles u, v :

$$(u^2 + v^2 - \lambda v^3)^2 = \lambda^2 (4u^2 + 3v^2)^3$$

c'est une courbe de la sixième classe, différente du folium. Son équation en coordonnées naturelles ρ, α étant :

$$\rho = 2\lambda \left\{ \cos 3\alpha + (2 + 11 \cos^2 \alpha - 4 \cos^4 \alpha)(4 - \cos^2 \alpha)^{-\frac{1}{2}} \right\}$$

on peut vérifier que c'est une courbe convexe fermée, de même longueur et de même aire que le folium et ayant de plus la même « largeur » que cette dernière en chaque sens (voir n° **25**).

30. Remarquons que l'on peut étendre facilement ces considérations à l'espace à trois dimensions ; une surface Π sera une sur-

face admettant deux et seulement deux plans tangents parallèles à un plan donné, les points de contact de ces plans tangents étant bien déterminés.

La surface enveloppée par le plan passant à égale distance de ces deux plans parallèles, sera la surface médiale de la surface Π considérée; ce sera une surface du type Π_0 c'est-à-dire une surface admettant un plan tangent et un seul parallèle à un plan donné quelconque.

La surface engendrée par les diamètres, c'est-à-dire par les droites reliant deux points de contact opposés, correspondra à la courbe enveloppe des diamètres de l'espace à deux dimensions.

A chaque surface Π excentrique correspondra une surface Π centrique ; et inversement à une surface Π à centre correspondra une famille de surfaces Π excentriques telles que la distance des deux plans tangents opposés correspondant à une direction donnée est la même pour toutes ces surfaces.

Les surfaces parallèles aux surfaces Π_0 sont des surfaces à diamètres constants ; si elles sont convexes elles ont comme la sphère en chaque sens la même « largeur ».

On pourra aussi considérer des familles de surfaces diamétrales correspondant aux courbes diamétrales dans le cas de deux dimensions. Les autres considérations peuvent de même être généralisées sans difficulté.

RÉSUMÉ

DES PROPOSITIONS CONCERNANT LES COURBES DU TYPE II

I. *Propriétés des courbes du type* II

1. La longueur algébrique (n° **3**) d'une courbe II est égale à celle de sa centrique (n° **21**).

2. L'aire algébrique (n° **4**) d'une courbe II est égale à la somme des aires algébriques de sa centrique et de sa médiale (n° **24**). L'aire algébrique d'une courbe II de longueur nulle est toujours négative (n° **16**).

Parmi les courbes d'un faisceau parallèle à une courbe II, il y a une courbe dont l'aire algébrique est minimum, c'est la courbe de longueur algébrique nulle du faisceau considéré.

Ce théorème est vrai pour le faisceau des courbes diamétrales correspondantes à une courbe II, et pour le faisceau des développoïdes d'une courbe II.

3. Les courbes admettant la même centrique possèdent les propriétés remarquables suivantes (n° **21**) :

a) Elles ont toutes la même longueur algébrique.

b) Les diamètres correspondant à la même direction ont la même longueur.

c) La distance des tangentes correspondant aux directions α et $\alpha+\pi$ est la même pour toutes ces courbes.

d) Les angles que les tangentes de direction α font avec les diamètres correspondants sont égales.

e) Les aires de ces courbes sont généralement différentes et parmi ces courbes c'est la centrique dont l'aire est maximum (n° **24**).

f) Les courbes barycentriques (n° **26**) correspondant à ces courbes sont les mêmes.

4. La courbe enveloppe des diamètres d'une courbe Π dont la centrique est une courbe convexe fermée est une courbe Π_0 (n° **21**).

5. Une développante quelconque d'une courbe Π de longueur algébrique nulle est une courbe Π (n° **12**).

II. *Transformation d'une courbe du type* Π *en une autre courbe du même type.*

1. La développoïde d'une courbe Π dont le rayon de courbure existe en chaque point est une courbe Π (n° **11**).

2. La radiale tangentielle (n° **14**) d'une courbe Π, dont le rayon de courbure existe en chaque point est une courbe Π, dont la longueur algébrique est égale à celle de la courbe primitive.

3. L'antiradiale tangentielle d'une courbe Π relativement au barycentre de courbure comme pôle est une courbe Π de même longueur algébrique que la courbe primitive.

4. Les courbes parallèles d'une courbe Π sont des courbes Π (n° **16**). Les développoïdes des courbes d'un faisceau parallèle forment de nouveau un faisceau parallèle ; il en est de même pour leurs radiales tangentielles et aussi leurs antiradiales tangentielles relativement au barycentre de courbure du faisceau parallèle. Deux courbes parallèles ont la même développée et la même médiale, mais les courbes enveloppes de leur diamètre sont en général des courbes différentes (n° **24**).

5. Les courbes « diamétrales » (n° **23**) d'une courbe Π sont des courbes Π. Les diamètres de la courbe Π et ceux de ces transformées enveloppent la même courbe. Les barycentres de courbure de la courbe et de ses transformées sont confondus. Les courbes de barycentres du n° **26** correspondant à un faisceau de courbes diamétrales sont des courbes semblables. Les développoïdes des courbes d'un faisceau diamétral forment un nouveau faisceau diamétral ; il en est de même pour leurs radiales tangentielles et leurs antiradiales tangentielles relativement au barycentre de courbure du faisceau diamétral. Par contre les courbes parallèles aux courbes d'un faisceau diamétral ne forment plus un tel faisceau.

III. *Transformations d'une courbe* Π_0 *en une autre courbe du même type*

Le trois premières transformations du n° II transforment une courbe du type Π_0 en une autre du même type. Étant donnée une courbe C du type Π, dont la médiale est C_1 et la centrique C_2, soient $\overline{C}$, $\overline{C}_1$ et $\overline{C}_2$ les courbes obtenues par l'une quelconque des trois premières transformations du n° II, on déduit des considérations des n^{os} **21** et **23** que $\overline{C}_1$ est la médiale et $\overline{C}_2$ la centrique de la nouvelle courbe $\overline{C}$; c'est-à-dire que l'une quelconque de ces trois transformations ne changent pas le rapport existant entre ces trois courbes.

IV. *Transformations d'une courbe convexe fermée en une autre courbe convexe fermée.*

1. La transformation par polaires réciproques, relativement à un cercle dont le centre est à l'intérieur de la courbe convexe donnée (n° **10** A).

2. La transformation antiradiale tangentielle relativement au barycentre de courbure comme pôle. Cette transformation répétée plusieurs fois donne une série de courbes convexes fermées ayant toutes la même longueur (n° **15**). Cette transformation transforme une courbe orbiforme en une autre courbe orbiforme (n° **27**).

3. La courbe barycentrique (n° **26**) d'une courbe convexe fermée est une courbe convexe fermée à centre; celle d'une orbiforme est un cercle.

V. *Transformstions d'une courbe convexe fermée en une courbe du type* Π *qui peut être convexe sous certaines conditions.*

1. La transformation parallèle.
2. La transformation par radiale tangentielle.
3. La transformation diamétrale.
4. La transformation par podaire négative oblique (n° **10**). Les trois premières de ces transformations transforment une orbiforme

en une courbe à diamètres constants qui peut être dans certains cas une courbe convexe fermée, donc une orbiforme. Les courbes parallèles convexes d'une courbe Π_0 sont aussi des orbiformes, de même que toutes les développantes convexes de ces courbes.

VI. *Les courbes suivantes sont des courbes orbiformes* :

1. Les courbes Π convexes dont la centrique est un cercle.
2. Les courbes convexes fermées dans lesquelles la somme des rayons de courbure opposés est constante.
3. Les courbes convexes fermées dont toutes les normales sont des normales doubles.
4. Les courbes convexes fermées à diamètres constants.
5. Les courbes convexes fermées dans lesquelles la distance des tangentes opposées est constante.
6. Les développantes convexes des courbes Π_0.
7. Les courbes convexes parallèles aux courbes Π_0.
8. Les courbes convexes fermées parallèles à elles-mêmes.

TABLE DES MATIÈRES